

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

PAULO MURARO FERREIRA

DIRECIONAMENTO EPR E IRREALISMO EM ESTADOS PUROS

CURITIBA PR

2019

PAULO MURARO FERREIRA

DIRECIONAMENTO EPR E IRREALISMO EM ESTADOS PUROS

Dissertação apresentada ao curso de Pós-Graduação em Física, Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Renato Moreira Angelo.

CURITIBA PR

2019

Catálogo na Fonte: Sistema de Bibliotecas, UFPR  
Biblioteca de Ciência e Tecnologia

F383d

Ferreira, Paulo Muraro

Direcionamento EPR e irrealismo em estados puros [recurso eletrônico] / Paulo Muraro Ferreira. – Curitiba, 2019.

Dissertação - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Física, 2019.

Orientador: Renato Moreira Angelo .

1. Mecânica quântica. 2. Sistema quântico. 3. Emaranhamento quântico. 4. Direcionamento EPR. I. Universidade Federal do Paraná. II. Angelo, Renato Moreira. III. Título.

CDD: 530.12

Bibliotecário: Elias Barbosa da Silva CRB-9/1894

## TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em FÍSICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **PAULO MURARO FERREIRA** intitulada: "**Direcionamento EPR e irrealismo em estados puros**", sob orientação do Prof. Dr. RENATO MOREIRA ANGELO, que após terem inquirido o aluno e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa. A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 26 de Julho de 2019.



RENATO MOREIRA ANGELO

Presidente da Banca Examinadora (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)



RODRIGO JOSÉ OCHEKOSKI MOSSANEK

Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)



FABIANO MANOEL DE ANDRADE

Avaliador Externo (UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA)

*À minha mãe, Ana.*

## **AGRADECIMENTOS**

Ao Professor Renato Moreira Angelo, pelos ensinamentos e pela paciência bem humorada com que sempre me motivou e me inspirou.

À minha mãe, Ana, pelo apoio emocional.

Ao grupo de pesquisa, em especial ao Professor Alexandre, pelas discussões sobre física.

Aos colegas de graduação e de mestrado, em especial ao Leonardo Souza, ao Felipe Pereira e à Carlla Oliveira, pela companhia.

À banca de pré-defesa e à banca de defesa, pelo tempo e atenção.

À CAPES, ao CNPQ e ao Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia de Informação Quântica pelo apoio financeiro.

## RESUMO

Direcionamento EPR ou EPR *steering* é um recurso quântico relacionado à possibilidade de, a partir de dois subsistemas  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  emaranhados, e em conjunto com comunicação clássica, colapsar o subsistema  $\mathcal{B}$  para diferentes subestados condicionados a distintas escolhas de medições no subsistema  $\mathcal{A}$ . Equivalentemente, a probabilidade conjunta para um estado EPR direcionável pode ser expressa como a soma convexa de probabilidades fatoráveis sendo uma das probabilidades marginais compatível com a teoria quântica e a outra uma distribuição de probabilidade genérica. No contexto de variáveis contínuas, existem duas principais medidas de direcionamento EPR na literatura, a primeira baseada na violação do princípio de incerteza para observáveis do subsistema  $\mathcal{B}$  inferidos com base na escolha dos observáveis medidos no subsistema  $\mathcal{A}$ , e o segundo baseado em funções entrópicas. Apesar de emaranhamento garantir direcionamento EPR para todo estado puro, ambos os critérios supracitados falham em detectar tal aspecto não local para certos estados puros emaranhados. O objetivo deste trabalho é investigar uma descrição realista em uma das partes de sistemas puros bipartidos, recobrando assim a noção de direcionamento EPR, e também desenvolver uma medida de direcionamento EPR baseada em realismo e fundamentadas em valores esperados que seja mais eficaz que os critérios conhecidos na literatura para variáveis contínuas. Para o desenvolvimento deste critério, consideramos elementos de realidade associados ao par canônico  $(q, p)$ , o que é implementado por projetores construídos a partir de estados coerentes bosônicos. Aplicando o critério baseado em realismo para o estudo de diversos estados puros emaranhados, verificamos que ele sempre acusa direcionamento EPR quando o estado é não separável, inclusive em regimes nos quais os critérios existentes falham.

**Palavras-chave:** Direcionamento EPR, emaranhamento, irrealismo.

## ABSTRACT

EPR steering is a quantum resource related to the possibility of using two entangled subsystems  $\mathcal{A}$  and  $\mathcal{B}$ , along with classical communication, to collapse the  $\mathcal{B}$  subsystem to different substates conditioned to distinct choices of measurements in the  $\mathcal{A}$  subsystem. Equivalently, the joint probability of a steerable state can be written as the convex sum of separable probabilities, where one of the marginal probabilities is compatible with the quantum theory and the other is a generic probability distribution. There are two main criteria for detection of steering for continuous variables: the first is set up on the violation of the uncertainty principle for observables of the  $\mathcal{B}$  subsystem inferred from observables measured on the  $\mathcal{A}$  subsystem, and the second is centered on entropic functions. Even though entanglement guarantees steering for any pure state, both aforementioned criteria fail to identify such non local aspect for some entangled pure states. The goal of this work is to investigate a realism based description for one of the subsystems of pure bipartite states, and, as a result, to recover the notion of steering, and also to develop a measure of steering, based on a hypothesis of realism and constructed upon expected values, that is more effective than the known criteria for continuous variables. In order to do so, we consider elements of reality associated to the canonical pair  $(q, p)$  and implemented by projectors built upon bosonic coherent states. Applying the realism based criterion for the study of several pure entangled states, we see that it always reveals steering when the state is not separable, even when the existing criteria do not.

**Keywords:** Steering, entanglement, irreality.



## LISTA DE FIGURAS

2.1	Entropia de von Neumann $S_N(\rho)$ (linha vermelha) e entropia linear $S_l(\rho)$ (linha azul) para $d = 4$ em função do parâmetro $\epsilon$ que determina o quão misto é o estado $\rho$ .	22
2.2	No modelo proposto por Reid, parte de um sistema emaranhado é enviado para Alice e a outra parte é enviada para Bob. Alice, através das medidas $\tilde{A}_\alpha$ realizadas por ela, estima os resultados $\tilde{B}_\beta$ obtidos por Bob. Tal inferência é possível devido às correlações quânticas do sistema emaranhado compartilhado por eles. . . . .	30
2.3	Diagrama de Venn representando a hierarquia das recursos quânticos. Todo estado Bell não local também é EPR direcionável, assim como todo estado EPR direcionável é emaranhado. . . . .	34
2.4	Emaranhamento quântico (linha azul) e correlação clássica (linha vermelha) em função do parâmetro adimensional $\tau = \lambda t$ . Percebe-se que o modelo clássico-estatístico tem, para tempos curtos, comportamento semelhante à teoria quântica. Nessas simulações, SA escolheram $w_{a0} = w_{b0} = 1$ . . . . .	38
2.5	Lado esquerdo da desigualdade CHSH para o estado quântico ( $S_q$ , linha azul) e para o modelo clássico estatístico ( $S_{cl}$ , linha vermelha), e violação máxima da CHSH (violação de Tsirelson) $2\sqrt{2}$ (linha tracejada laranja). Apesar do estado quântico apresentar não localidade de Bell, o modelo clássico-estatístico não é capaz de exibir essa correlação, estando assim de acordo com o teorema de Bell. Nessas simulações, SA escolheram $w_{a0} = w_{b0} = 1$ . . . . .	38
2.6	Lado esquerdo da desigualdade CJWR para detecção de direcionamento EPR no estado quântico ( $F_q$ , linha azul) e no modelo clássico ( $F_{cl}$ , linha vermelha). O estado apresenta direcionamento EPR quando $F_{q(cl)}$ é maior do 1 (linha tracejada laranja). O estado quântico apresenta direcionamento EPR, mas o modelo realista, assim como não apresenta não localidade de Bell, também não é capaz de acusar direcionamento EPR. Nessas simulações escolhemos $w_{a0} = w_{b0} = 1/\sqrt{2}$ . . . . .	39
2.7	Protocolo de Bilobran e Angelo (figura adaptada do trabalho original [40]). . . . .	40
3.1	Protocolo de medição não revelada para posição e momento (figura adaptada de [40]). Um estado $\rho$ é preparado e então medições não reveladas de posição e momento são realizadas através do estado coerente $z$ , resultando no estado não direcionável $\Phi(\rho)$ . . . . .	43

3.2	Densidades de probabilidade para o estado comprimido de vácuo de dois modos em termos das posições para diferentes valores de $R$ : 3.2(a) com $R = 0, 5$ ; 3.2(c) com $R = 1$ ; 3.2(e) com $R = 2$ . Similarmente para a densidades de probabilidades em termos dos momentos: 3.2(b) com $R = 0, 5$ ; 3.2(d) com $R = 1$ ; 3.2(f) com $R = 2$ . O operador de compressão alonga as densidades de probabilidade para as posições em direção oposta à densidade de probabilidade para os momentos. Para $R = 1$ , $S(r)$ não tem nenhuma ação e recobramos a distribuição simétrica. . . . .	48
3.3	Entropia de emaranhamento para o estado comprimido de vácuo em termos do parâmetro de compressão $r$ (linha sólida laranja). O emaranhamento tende assintoticamente para o valor máximo $E_l = 1$ (linha tracejada). . . . .	49
3.4	Produto das incertezas $(\Delta\tilde{B}_{\beta 1})^2(\Delta\tilde{B}_{\beta 2})^2$ (critério de Reid para detecção de direcionamento EPR) calculado para o estado comprimido de vácuo $ \xi\rangle$ (linha sólida vermelha) e para o estado comprimido de vácuo com um fóton subtraído (estado emaranhado que será tratado na próxima seção) $ \xi_{-1}\rangle$ (linha sólida azul). Direcionamento EPR é registrado quando os valores das curvas plotadas são menores que $1/4$ (linha tracejada laranja). Para o estado gaussiano $ \xi\rangle$ esse critério consegue detectar direcionamento EPR quando o estado é emaranhado (ou seja, quando $r \neq 0$ ), porém, para $ \xi_{-1}\rangle$ , o critério falha para $r$ pequeno. . . . .	51
3.5	Lado esquerdo da desigualdade (2.72) (critério entrópico) para o estado comprimido de vácuo (linha sólida vermelha) e para o estado comprimido de vácuo com um fóton subtraído (linha sólida azul). Direcionamento EPR é detectado sempre os valores das curvas são menores que $\ln \pi e$ (linha tracejada laranja). Logo, o estado comprimido de vácuo é, com exceção de para $r = 0$ , sempre direcionável, e o estado comprimido de vácuo com um fóton subtraído é direcionável para todo valor de $r$ . . . . .	53
3.6	Entropia de emaranhamento $E_l$ para o estado comprimido de vácuo com um fóton subtraído em termos do parâmetro de compressão $r$ . Vemos que para todo $r$ o estado é emaranhado. O emaranhamento tende assintoticamente para o valor máximo $E_l = 1$ (linha tracejada). . . . .	54
3.7	Critério de direcionamento baseado em realismo $\Delta(A_\alpha^2, B_\beta^2, \rho)/\mathfrak{Q}$ para o estado comprimido de vácuo com um fóton subtraído com $r = 0, 5$ (figura 3.7(a)) e com $r = 2$ (figura 3.7(b)). . . . .	55
3.8	Critério baseado em realismo $\Delta$ para o estado comprimido de vácuo com um fóton subtraído. Escolhemos $\alpha$ e $\beta$ de modo a mostrar que para diferentes valores de $r$ é possível selecionar observáveis para os quais $\Delta(A_\alpha^2, B_\beta^2, \rho) = 0$ . Isso indica a existência de contextos em que a Mecânica Quântica comporta a noção de realismo local no espaço de fase. . . . .	56

3.9	O quantificador $\mathfrak{Q}(\rho)$ de direcionamento EPR baseado em realismo para o estado comprimido de vácuo com um fóton subtraído é uma função monotonicamente crescente de $r$ . . . . .	56
3.10	Emaranhamento medido pela entropia de emaranhamento $E_I(\rho)$ (linha azul) e quantificador $\mathfrak{Q}(\rho)$ de direcionamento EPR baseado em realismo para os estados $ \Psi_1\rangle$ ou $ \Psi_2\rangle$ [equação (3.44)] (linha vermelha). Direcionamento EPR baseado em realismo é sempre detectado quando o estado é emaranhado. . . . .	57
3.11	Critério entrópico (linha azul), critério de Reid (linha vermelha) e critério baseado em realismo (curva preta) para o estado $ \Psi_1\rangle$ . Para os dois primeiros critérios, direcionamento EPR é detectado quando as função plotadas são positivas. Na região $0,6 \leq \theta \leq 2,5$ e $0,9 \leq \theta \leq 2,3$ , o critério de Reid e o critério entrópico, respectivamente, falham (exceto para $\theta = n\pi/2$ , com $n \in \mathbb{N}$ ) em identificar direcionamento EPR. . . . .	58
3.12	Critério baseado em realismo para o estado N00N para vários valores de $n$ . O valor $n = 2$ é o único para o qual há dependência em $\alpha, \beta$ e $\phi$ . Para esse $n$ , escolhemos o valor máximo de $\Delta(A_\alpha^2, B_\beta^2, \rho)_{n=2}$ para exibir no gráfico. . . . .	59

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>13</b>
<b>2</b>	<b>Fundamentação Teórica</b>	<b>17</b>
2.1	Operador densidade	17
2.2	Estados coerentes	18
2.3	Emaranhamento	19
2.3.1	Entropia de von Neumann	20
2.3.2	Entropia linear	21
2.4	Completeza da Mecânica Quântica — EPR	22
2.5	Não localidade de Bell	23
2.6	Direcionamento EPR (EPR <i>Steering</i> )	25
2.6.1	Direcionamento EPR como uma tarefa quântica	25
2.6.2	Variáveis discretas	29
2.6.3	Variáveis contínuas	29
2.7	Hierarquia das correlações	33
2.8	Modelo de variáveis ocultas	34
2.8.1	Variáveis contínuas	35
2.8.2	Variáveis discretas	36
2.8.3	Direcionamento EPR	39
2.9	Irrealismo	39
2.9.1	Irrealidade de Observáveis Incompatíveis	41
<b>3</b>	<b>Irrealismo e Direcionamento EPR</b>	<b>42</b>
3.1	Direcionamento EPR	42
3.1.1	Estado clássico para Alice	44
3.1.2	Crítério para identificação de direcionamento EPR	45
3.1.3	Quantificador de Direcionamento EPR	47
3.2	Estado comprimido de vácuo de dois modos	47
3.2.1	Emaranhamento	49
3.2.2	Direcionamento EPR	50
3.3	Estado comprimido de vácuo com um fóton subtraído	52
3.3.1	Emaranhamento	53

3.3.2	Direcionamento EPR . . . . .	54
3.4	Superposição do primeiro e segundo estados do oscilador harmônico . . . . .	56
3.4.1	Emaranhamento . . . . .	57
3.4.2	Direcionamento EPR . . . . .	57
3.5	Estado N00N . . . . .	58
<b>4</b>	<b>Conclusão . . . . .</b>	<b>60</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>62</b>

# Capítulo 1

## Introdução

A Mecânica Quântica (MQ) é uma teoria superpoderosa e bem sucedida, mas tem uma estrutura formal complicada e pouco intuitiva (vetores num espaço complexo), o que suscita grandes polêmicas, incertezas, insatisfação, problemas conceituais, etc. Isso ocorre em particular devido ao princípio da superposição. Ao fazer medições do observável de spin na direção  $z$ , por exemplo, os possíveis estados encontrados são  $|+\rangle$  (spin na direção  $+z$ ) ou  $|-\rangle$  (spin na direção  $-z$ ). Entretanto, antes da medição ser realizada, a MQ prevê a existência de estados como  $|+\rangle + |-\rangle$ . Qual o significado físico deles? O spin está afinal definido antes da medição? Há elemento de realidade (valor definido) para alguma grandeza? O colapso pós-medição de um spin implica alteração da realidade remota? Schrödinger discutiu o drama conceitual aqui apontado em termos do famoso gato morto-vivo [1].

Albert Einstein, Boris Podolsky e Nathan Rosen (EPR) foram os primeiros a discutir de maneira mais formal a noção de elementos de realidade no trabalho de 1932 [2] e, a partir disto e da definição de completeza de uma teoria física, além do postulado de localidade, elaboraram um argumento defendendo que a MQ é incompleta. EPR defenderam então que a MQ é provisória: deve vir outra teoria. Então, John Bell [3] mostrou que, dada a hipótese de causalidade local (um realismo pré-existente aliado a relações de causa e efeito), certa desigualdade deve ser satisfeita para uma dada combinação de valores esperados. Ou seja, qualquer teoria pós-quântica, com variáveis ocultas locais, consistente com as hipóteses caras a EPR, deve satisfazer a desigualdade de Bell. Outros testes para detectar não localidade foram desenvolvidos, como por exemplo, a desigualdade CHSH, formulada em 1969 por Clauser, Horne, Shimony e Holt [4]. Tais desigualdades foram testadas experimentalmente várias vezes ao longo da história, primeiramente por Freedman e Clauser em 1972 [5], nos experimentos liderados por Aspect em 1981 [6] e 1982 [7] e, mais recentemente, em [8–10]. Verificou-se no laboratório que essas desigualdades são violadas, indicando que a natureza não é compatível com tal hipótese não local. Em vários trabalhos o foco tem sido em fechar brechas experimentais (os chamados *loopholes*), que comprometeriam a validade dos resultados [11–13]. Tais experimentos indicam a existência de aspectos não locais que, contudo, não violam o princípio de sinalização (não é possível transmitir informação de forma superluminal). David Bohm mostrou, por construção explícita, que é possível construir uma teoria de variáveis ocultas (trajetórias Bohmianas) [14], que produz as mesmas previsões que a MQ usual [15], mas estas são explicitamente não locais (logo, em pacífica coexistência com o trabalho de Bell).

O conceito fundamental usado por EPR foi o emaranhamento: recurso quântico vital para várias tarefas de informação e comunicação quântica (teleporte, codificação superdensa, computação quântica, etc), é o aspecto de não-classicalidade que não pode ser gerado via operações locais e comunicação clássica [16]. Além do emaranhamento e da não localidade de

Bell, outros aspectos não-clássicos foram descobertos ao longo da história. Um deles é discórdia quântica [17, 18] — recurso que pode ser entendido como uma medida de quanticidade mais primordial do que o emaranhamento, uma vez que existem estados separáveis para os quais a discórdia é não nula.

Outro recurso é o EPR *steering*, termo cunhado por Schrodinger [19], que traduziremos livremente como direcionamento EPR, e que hoje denota a possibilidade de utilizar um estado emaranhado compartilhado por dois laboratórios (o de Alice e o de Bob) para, em conjunto com comunicação clássica, colapsar o estado do laboratório de Bob à distância através da escolha das diferentes bases na qual Alice faz medidas. Em 2007, Wiseman, Jones e Doherty [20] definiram direcionamento EPR de acordo com uma tarefa quântica e mostraram que um estado bipartido é direcionável se a distribuição de probabilidades de um dos subsistemas (por exemplo, o do Bob) pode ser descrita através da MQ. Nesta tarefa, Bob pode fazer tomografia<sup>1</sup> no seu estado e portanto, caracterizá-lo completamente, ao passo que Alice não tem acesso às especificidades do seu equipamento. Este cenário é chamado de caixa preta [21] para a Alice, haja vista que ela desconhece os processos que gerem o comportamento do seu sistema. Devido a esse cenário, uma das aplicações de direcionamento EPR é em criptografia quântica [22–25] quando uma das partes não pode ser confiada. Outra área na qual direcionamento EPR revela sua utilidade é teletransporte quântico [26–28], processo aonde, usando correlações quânticas e comunicação clássica, o estado de Alice — desconhecido por ela — é destruído e informação é transmitida para Bob de modo que ele consiga reconstruir o estado original [29].

Para tais aplicações, dado um estado  $\rho$ , é interessante saber se ele é direcionável. Para sistemas de variáveis discretas, alguns critérios para a detecção de direcionamento EPR estão bem estabelecidos [30, 31] — uma revisão detalhada foi feita recentemente por Uola *et al.* [32]. Adicionalmente, Costa e Angelo [33] derivaram um quantificador de direcionamento EPR com fórmula fechada para estados de dois qubits. Para variáveis contínuas, existem dois critérios principais: o proposto por Reid [34], baseado na violação do princípio de incerteza de quadraturas inferidas utilizando correlações, e o critério proposto por Walborn *et al.* [35], baseado em funções entrópicas. Chowdhury *et al.* [36] compara os dois critérios calculando-os para alguns estados e mostra que existem estados direcionáveis onde o critério entrópico é capaz de identificar direcionamento EPR mas o critério de Reid falha.

Enquanto emaranhamento, não localidade de Bell e direcionamento EPR coalescem para estados puros, sabe-se que eles são fundamentalmente distintos para estados mistos. Por exemplo, emaranhamento é condição necessária para a ocorrência de não localidade de Bell, mas não suficiente (similarmente para direcionamento EPR). Para a ausência de emaranhamento basta que o estado seja separável, mas para a ocorrência de não localidade de Bell, não basta que o estado seja não separável. Algumas pistas sobre os mecanismos necessários podem ser obtidas a partir de descrições baseadas em modelos de probabilidades conjuntas, os quais podem ser definidos inclusive para teorias genéricas pós-quânticas. Neste enquadramento, é possível notar diferenças entre os vários recursos. Embora a hipótese de separabilidade das probabilidades marginais seja bastante clara, a de realismo, ou realismo local é questionável. É equivalente à localidade causal? Ou ao determinismo? Tais discussões podem ser encontradas em [37–39]. Além disso, qual a definição matemática precisa de realismo?

Bilobran e Angelo (BA) introduzem uma noção formal e um quantificador de realismo justamente para resolver este impasse [40]. Embora contenha o critério de EPR para estados puros, o desses autores estende o de EPR para estados mistos. Além disso, olhando para

<sup>1</sup>A tomografia de um estado quântico é o processo pelo qual determina-se o estado a partir de inúmeras medições de tantos observáveis quantos forem necessários sobre um *ensemble* ideal (infinitas cópias do estado que se quer determinar).



alterações no realismo em um laboratório, enquanto induzidas por distúrbios produzidos em um outro laboratório remoto, BA introduzem uma noção de não localidade explicitamente baseada no irrealismo quântico. Esta noção foi explorada no trabalho de Gomes e Angelo [41], no qual foi apresentado um quantificador de não localidade baseada em realismo e, em um trabalho seguinte [42], demonstraram que a não localidade baseada em realismo pode ocorrer quando todas as outras medidas de não-classicalidade (não localidade de Bell, direcionamento EPR, emaranhamento, discórdia) desaparecem pela ação de canais locais de ruído. A definição de irrealidade gera ainda outras consequências/generalizações interessantes como conexões com medições fracas, e princípio de complementaridade entre irrealidade e informação quântica, as quais foram estudadas por Dieguez e Angelo [43] e exploradas experimentalmente por Mancino *et al.* [44]. Sobretudo, mostra-se que a não localidade aqui derivada é totalmente diferente da de Bell, podendo existir mesmo na ausência dos outros recursos quânticos (emaranhamento, direcionamento EPR, discórdia). Mais recentemente, Freire e Angelo [45] estenderam a irrealidade para variáveis contínuas e derivaram uma relação de incerteza para a irrealidade de observáveis incompatíveis, na qual é mostrado que as irrealidades nunca zeram simultaneamente se o estado for puro. Vários desses aspectos não locais supracitados são reconhecidos hoje como recursos em tarefas específicas. Um teoria de recursos para o direcionamento EPR, por exemplo, foi construída recentemente por Gallego e Aolita [46]. Além disso, certas correlações quânticas obedecem uma hierarquia [20, 41] e um problema interessante consiste da busca de contextos de unificação para essas e tantas outras medidas de não-classicalidade.

Uma questão que emerge naturalmente neste contexto é se podemos avaliar o grau de irrealismo de uma quantidade como a ação, que é de certa forma definida em função de posição e momento simultaneamente. Em particular, no caso de um sistema com duas partes, se a MQ é compatível com uma descrição realista em uma das partes e não realista na outra, o que implica em aspectos de direcionamento EPR. O objetivo deste trabalho é investigar esses pontos. Para tanto, estenderemos o critério de BA utilizando estados coerentes (os estados "mais clássicos" da MQ) e definindo projetores nesta base. A ideia é propor medidores para a violação do realismo local (em uma das partes) e, portanto, um possível medidor de direcionamento EPR. Trabalharemos com valores esperados de potências de observáveis lineares em posição e momento na esperança de obter um critério para identificar direcionamento EPR operacionalmente mais simples do que o critério entrópico e mais eficaz do que o critério de Reid. Também faremos uma maximização nos observáveis do medidor proposto, de modo a obter um quantificador de direcionamento EPR dependente apenas do estado considerado.

No capítulo 2, revisaremos alguns resultados importantes da Mecânica Quântica como o formalismo de matriz densidade e estados coerentes canônicos. Iniciaremos o estudo das correlações discutindo sobre o emaranhamento e apresentando a entropia de von Neumann calculada no estado reduzido como quantificador de não separabilidade. Também trataremos do trabalho EPR. Em seguida, a não localidade de Bell será abordada, assim como critérios para detectá-la. Prosseguiremos investigando detalhadamente o direcionamento EPR, percorrendo também sobre como o colapso do estado de Bob se dá através de comunicação clássica, obedecendo assim o princípio de não-sinalização. Depois, apresentando as hipóteses de separabilidade, localidade de Bell e direcionamento EPR em termos de probabilidades, dissertaremos sobre a hierarquia entre elas. Também exploraremos o trabalho de Silveira e Angelo [47, 48] no qual constrói-se um modelo clássico-estatístico para estados puros baseado na teoria de Liouville, onde as trajetórias no espaço de fase cumprem o papel de variáveis ocultas. Demonstra-se que este modelo é capaz de imitar a dinâmica de emaranhamento quântico porém não consegue violar a desigualdade CHSH e, portanto, não apresenta não localidade de Bell. Estendemos esse



resultado e mostramos que tal modelo também não é apto a reproduzir direcionamento EPR. Para encerrar o capítulo, revisaremos o trabalho de Bilobran e Angelo sobre realismo.

Iniciaremos o capítulo 3 introduzindo o nosso modelo realista para o subsistema de Alice e mostraremos como ele implica em um estado EPR direcionável  $\Phi(\rho)$ . Em seguida, proporemos um critério para identificar direcionamento EPR comparando valores esperados de  $\rho$  e de  $\Phi(\rho)$ . Fecharemos o capítulo comparando o nosso critério com o critério de Reid e o critério entrópico para vários estados. Veremos que o critério baseado em realismo é mais eficaz que o critério de Reid para estados não-gaussianos e também é capaz de detectar direcionamento EPR para estados nos quais o critério entrópico falha.

## Capítulo 2

# Fundamentação Teórica

### 2.1 Operador densidade

Na Mecânica Quântica, quando a preparação dá total informação sobre o estado do sistema, dizemos que o estado é puro. Para tratar com sistemas que estão em uma mistura estatística de vários estados normalizados  $|\psi_i\rangle$  (não necessariamente ortogonais entre si), cada um com sua respectiva probabilidade  $p_i$  de ocorrência, onde  $0 < p_i < 1$  e  $\sum_i p_i = 1$ , necessitamos do formalismo de operador densidade, cuja definição é

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|. \quad (2.1)$$

Algumas propriedades de  $\rho$  seguem imediatamente da definição acima.

1. Normalização:  $\text{Tr } \rho = \sum_i p_i \langle \psi_i | \psi_i \rangle = \sum_i p_i = 1$ .
2. Hermiticidade:  $\rho^\dagger = \sum_i p_i^* (|\psi_i\rangle \langle \psi_i|)^\dagger = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| = \rho$ .
3. Não negatividade:  $\langle \eta | \rho | \eta \rangle = \sum_i p_i |\langle \eta | \psi_i \rangle|^2 \geq 0$  para todo  $|\eta\rangle$ .

#### Valores Esperados

Ao obter resultados de medidas de um observável  $A$  atuando no espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$ , pode-se computar o valor esperado  $\langle A \rangle$  de um *ensemble* estatístico através da média do valor esperado de cada estado  $|\psi_i\rangle$  [49]

$$\langle A \rangle = \sum_i p_i \langle \psi_i | A | \psi_i \rangle = \sum_i p_i \text{Tr}(A |\psi_i\rangle \langle \psi_i|) = \text{Tr}(\rho A). \quad (2.2)$$

A equação acima é geral e pode ser utilizada com estados multipartidos. Por exemplo, para um estado bipartido  $\rho$  atuando no espaço de Hilbert  $\mathcal{H}_{\mathcal{A}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{B}}$ , caso recorrente neste trabalho, com um observável  $A \otimes \mathbb{1}$  atuante apenas em  $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$ , temos o valor esperado

$$\langle A \otimes \mathbb{1} \rangle = \text{Tr}_{\mathcal{A}} \text{Tr}_{\mathcal{B}} (A \otimes \mathbb{1} \rho) = \text{Tr}_{\mathcal{A}} [A \text{Tr}_{\mathcal{B}}(\rho)] = \text{Tr}_{\mathcal{A}} (A \rho_{\mathcal{A}}), \quad (2.3)$$

onde  $\rho_{\mathcal{A}} = \text{Tr}_{\mathcal{B}} \rho$  é o estado reduzido de  $\mathcal{A}$ , o qual equivale ao descarte dos graus de liberdade do subespaço  $\mathcal{B}$ . Similarmente, definindo o estado reduzido  $\mathcal{B}$  como  $\rho_{\mathcal{B}} = \text{Tr}_{\mathcal{A}} \rho$ , temos que o valor esperado de um observável  $\mathbb{1} \otimes B$  atuando somente no subespaço  $\mathcal{B}$  é dado por

$$\langle \mathbb{1} \otimes B \rangle = \text{Tr}_{\mathcal{B}} (B \rho_{\mathcal{B}}). \quad (2.4)$$

Doravante omitiremos a identidade  $\mathbb{1}$  de modo que o espaço no qual o observável atua será evidente pelo contexto.

### Evolução Temporal

Na formulação de Schrödinger, a dinâmica de um ket de estado  $|\psi(0)\rangle$  em  $t = 0$  se dá através do operador de evolução temporal  $U$  associado ao hamiltoniano  $H$  por  $|\psi(t)\rangle = U |\psi(0)\rangle$ . Consequentemente, o operador densidade evoluído no tempo é obtido através da equação (2.1) por

$$\begin{aligned}\rho(t) &= \sum_i p_i |\psi_i(t)\rangle \langle \psi_i(t)| \\ &= \sum_i p_i U |\psi_i(0)\rangle \langle \psi_i(0)| U^\dagger \\ &= U \rho(0) U^\dagger.\end{aligned}\tag{2.5}$$

Se o hamiltoniano independe do tempo, o operador de evolução temporal é dado por  $U = e^{-\frac{iHt}{\hbar}}$  [50].

## 2.2 Estados coerentes

Fundamentais para o contexto de variáveis contínuas considerado neste trabalho, estados coerentes  $\{|z\rangle\}$  são definidos como autoestados do operador de aniquilação

$$\hat{a} |z\rangle = z |z\rangle,\tag{2.6}$$

com autovalor  $z \in \mathbb{C}$ .

Na representação de Fock, pode-se escrever o estado coerente como

$$|z\rangle = e^{-\frac{|z|^2}{2}} \sum_n \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle,\tag{2.7}$$

onde  $|n\rangle$  e  $\hbar\omega(n + 1/2)$  são, respectivamente, os autokets e autovalores do hamiltoniano do oscilador harmônico

$$H = \hbar\omega \left( \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right),\tag{2.8}$$

de massa  $m$  e frequência  $\omega$ , onde  $\hat{a}^\dagger$  é o operador de criação. O estado coerente é particularmente útil ao considerar-se limites clássicos pois é um estado de incerteza  $\sigma_A^2 = \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle$  mínima para o observável de posição  $Q$  e para o observável de momento  $P$ . Os desvios padrões são dados por

$$\begin{aligned}\sigma_Q &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} = \frac{b}{\sqrt{2}}, \\ \sigma_P &= \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} = \frac{c}{\sqrt{2}},\end{aligned}\tag{2.9}$$

onde  $b = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$  e  $c = \frac{\hbar}{b} = \sqrt{\hbar m\omega}$ , de modo que

$$\sigma_Q \sigma_P = \frac{\hbar}{2}. \quad (2.10)$$

Além disso, o valor da energia relativa de um estado coerente é bem definido no regime de  $|z|$  grande [51] pois

$$\frac{\sigma_H}{\langle H \rangle} = \frac{1}{|z_0|} \ll 1. \quad (2.11)$$

O conjunto de estados coerentes forma uma base supercompleta (ainda é uma base mesmo se alguns elementos do conjunto forem retirados), de modo que é possível decompor qualquer vetor utilizando a relação de fechamento

$$\int \frac{d^2 z}{\pi} |z\rangle \langle z| = \mathbb{1}, \text{ onde } d^2 z = d(\text{Re}(z)) d(\text{Im}(z)), \quad (2.12)$$

ainda que o produto interno entre dois estados diferentes não se anule

$$\langle z_1 | z_2 \rangle = \exp \left[ -\frac{|z_1|^2}{2} - \frac{|z_2|^2}{2} + z_1^* z_2 \right]. \quad (2.13)$$

A parametrização usual de  $z$  é tal que os valores esperados do observável de posição  $Q$  e de momento  $P$  sejam idênticos, respectivamente, à posição  $q$  e ao momento  $p$  de um oscilador harmônico clássico de massa  $m$  e frequência  $\omega$ . Dessa maneira, utilizando as relações entre o observável de posição e momento e os operadores de criação e de aniquilação,

$$\begin{aligned} Q &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \\ P &= i \sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}} (\hat{a}^\dagger - \hat{a}), \end{aligned} \quad (2.14)$$

em conjunto com (2.6), tem-se

$$\begin{aligned} \langle Q \rangle &= \langle z | Q | z \rangle = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} \text{Re}(z), \\ \langle P \rangle &= \langle z | P | z \rangle = \sqrt{2m\omega\hbar} \text{Im}(z), \end{aligned} \quad (2.15)$$

de modo que as condições  $q = \langle Q \rangle$  e  $p = \langle P \rangle$  resultam na parametrização

$$z = \text{Re}(z) + i \text{Im}(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{q}{\sigma_Q} + i \frac{p}{\sigma_P} \right), \quad (2.16)$$

com as variáveis  $p$  e  $q$  que definem o espaço de fase de um oscilador harmônico clássico.

## 2.3 Emaranhamento

Dizemos que dois sistemas quânticos são emaranhados quando as correlações criadas após eles interagirem impossibilitam a descrição de cada sistema individual separadamente, isto

é, independentemente do estado quântico do outro sistema. Formalmente dizemos que um estado bipartido puro  $\rho \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}_{\mathcal{A}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{B}})$ , sendo  $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$  o conjunto de operadores limitados que atuam em  $\mathcal{H}$ , é emaranhado quando é não separável, ou seja, não se fatora como  $\rho = \sigma \otimes \chi$ , onde  $\sigma \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}_{\mathcal{A}})$  e  $\chi \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}_{\mathcal{B}})$ . Para um estado misto  $\rho$ , dizemos que ele é emaranhado quando não podemos escrevê-lo como a soma

$$\rho = \sum_{\lambda} p(\lambda) \sigma_{\lambda} \otimes \chi_{\lambda}, \quad (2.17)$$

onde  $p(\lambda)$  é uma distribuição de probabilidade — isto é,  $p(\lambda) \geq 0$  e  $\sum_{\lambda} p(\lambda) = 1$  — e  $\sigma_{\lambda}$  e  $\chi_{\lambda}$  são estados quânticos atuando, respectivamente, em  $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$  e  $\mathcal{H}_{\mathcal{B}}$ .

É útil reescrever essa definição em termos de probabilidades que podem ser calculadas com resultados de medições feitas experimentalmente. Dado um estado  $\rho$  bipartido e observáveis  $A$  e  $B$  atuando, respectivamente nos subsistemas  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$ , a probabilidade de se obter o autovalor  $a$  ao medir  $A$  e o autovalor  $b$  ao medir  $B$  é dada por

$$p(a, b|A, B; \rho) = \text{Tr}[(\hat{\Pi}_a^A \otimes \hat{\Pi}_b^B)\rho], \quad (2.18)$$

onde  $\hat{\Pi}_a^A$  é um projetor tal que  $A\hat{\Pi}_a^A = a\hat{\Pi}_a^A$ . Substituindo a equação (2.17) na equação (2.18) temos que um estado é separável quando é possível escrever

$$p(a, b|A, B; \rho) = \sum_{\lambda} p(\lambda) p_q(a|A, \lambda) p_q(b|B, \lambda). \quad (2.19)$$

O subíndice em  $p_q(a|A, \lambda) = \text{Tr}_{\mathcal{A}}[\hat{\Pi}_a^A \sigma_{\lambda}]$  e  $p_q(b|B, \lambda) = \text{Tr}_{\mathcal{B}}[\hat{\Pi}_b^B \chi_{\lambda}]$  é para enfatizar que as probabilidades foram obtidas a partir de estados quânticos.

### 2.3.1 Entropia de von Neumann

Em teoria de informação, a incerteza relacionada a uma distribuição de probabilidades clássica é medida pela entropia de Shannon [52]. Com o objetivo de obter um critério operacional para detectar emaranhamento e, mais do que isso, quantificá-lo, revisaremos agora a entropia de Shannon calculada para os autovalores do operador densidade, também conhecida como entropia de von Neumann [53], definida como

$$S_N(\rho) = -\text{Tr}(\rho \ln \rho), \quad (2.20)$$

que também pode ser expressa em termos dos autovalores de  $\rho = \sum_j k_j |j\rangle \langle j|$  (decomposição espectral) como

$$S_N(\rho) = -\sum_j k_j \ln k_j, \quad (2.21)$$

onde convencionou-se que, se  $k_j = 0$ ,  $k_j \ln k_j = 0$ .

Para estados puros, temos  $S_N = 0$ , e para o estado maximamente misto  $\rho = \frac{\mathbb{1}}{d}$ , a entropia de von Neumann atinge o valor máximo de  $S_N = \ln d$ , onde  $d$  é a dimensão do espaço de Hilbert [54]. Dessa maneira, a entropia de von Neumann é uma medida de quão misto é um estado quântico (ou quanta incerteza temos sobre a preparação do estado).

Empregando a desigualdade de Araki-Lieb [55]

$$S_N(\rho) \geq |S_N(\rho_{\mathcal{A}}) - S_N(\rho_{\mathcal{B}})| \quad (2.22)$$

para um estado puro ( $S_N(\rho) = 0$ ), percebemos que as entropias dos estados reduzidos  $\rho_{\mathcal{A}} = \text{Tr}_{\mathcal{B}} \rho$  e  $\rho_{\mathcal{B}} = \text{Tr}_{\mathcal{A}} \rho$  são iguais, de modo que podemos considerá-las uma propriedade do sistema como um todo. Daqui em diante denotaremos  $\rho_{red} = \rho_{\mathcal{A}(\mathcal{B})}$ . Como proposto por Bennett *et al.* [56], podemos quantificar o emaranhamento  $E(\rho)$  de um estado puro bipartido através do cálculo da entropia de von Neumann para um dos estados reduzidos

$$E(\rho) = S_N(\rho_{\mathcal{A}}) = S_N(\rho_{\mathcal{B}}). \quad (2.23)$$

Se o estado global  $\rho$  é puro e separável (sem emaranhamento), então os estados reduzidos serão puros também, e a entropia dos estados reduzidos será nula. Porém, se houver emaranhamento, os estados reduzidos serão mistos, e a entropia desses estados será maior que zero. Usar a entropia do estado reduzido como medidor de emaranhamento está baseado no fato de que o emaranhamento de estados puros bipartidos é tal que embora tenha-se informação total sobre a preparação  $\rho$ , as partes são mistas (temos informação parcial sobre os estados reduzidos).

Essa medida satisfaz várias propriedades interessantes [57], algumas das quais listaremos abaixo:

- (i) Se o estado  $\rho$  é separável então  $S_N(\rho_{red}) = 0$ .
- (ii) O emaranhamento de um estado  $\rho$  maximamente emaranhado formado por dois subsistemas de dimensão  $d$  é  $S_N(\rho_{red}) = \ln d$ .
- (iii) Comunicação clássica e operações locais aplicada em  $\rho$  não aumentam  $S_N(\rho_{red})$ .

### 2.3.2 Entropia linear

Para estudar outra medida de emaranhamento, consideramos a entropia linear

$$S_l = 1 - \text{Tr}(\rho^2). \quad (2.24)$$

A quantidade  $\text{Tr}(\rho^2)$  também é chamada de pureza. É esclarecedor perceber que a entropia linear mede o quão misto é um estado ao analisar o seguinte exemplo. Considere o estado

$$\rho = (1 - \epsilon) |\Psi\rangle \langle \Psi| + \epsilon \frac{\mathbb{1}}{d}, \quad (2.25)$$

com  $\epsilon \in [0, 1]$ , atuando no espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  com dimensão  $d$ . Considerando o estado  $\rho' = |\Psi\rangle \langle \Psi|$  puro, o estado acima varia linearmente entre o estado maximamente misto  $\mathbb{1}/d$  ( $\epsilon = 1$ ) e um estado puro  $\rho'$  ( $\epsilon = 0$ ). Ao calcular a entropia linear para  $d = 4$ , obtemos

$$S_l(\rho) = \frac{3}{4}(2 - \epsilon)\epsilon. \quad (2.26)$$

Como mostrado na figura 2.1, a entropia linear também varia continuamente de modo ela assume valores maiores quando o estado é mais misto ( $\epsilon$  mais perto de 1) e valores menores quando  $\rho$  é mais puro ( $\epsilon$  mais perto de 0). Tal comportamento também é observado para a entropia de von Neumann no cenário em que  $|\Psi\rangle$  é o estado singleto  $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle \otimes |-\rangle - |-\rangle \otimes |+\rangle)$ .

Quando calculada no estado reduzido, assim como  $S_N(\rho_{red})$ , a entropia linear também é uma medida de emaranhamento e, neste caso, a denotaremos  $E_l(\rho) = S_l(\rho_{red})$  e a chamaremos de

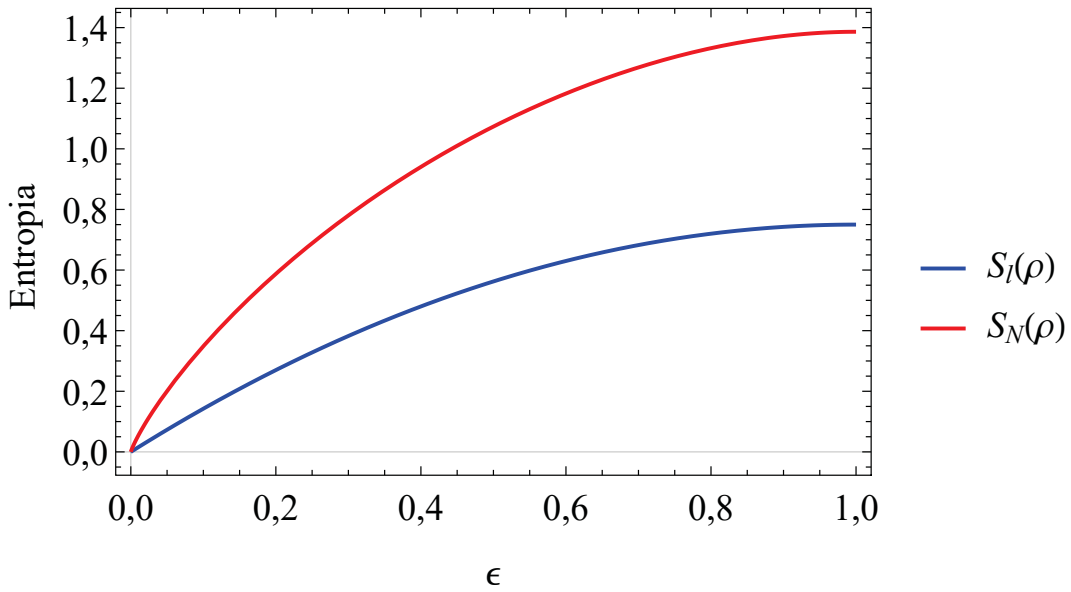


Figura 2.1: Entropia de von Neumann  $S_N(\rho)$  (linha vermelha) e entropia linear  $S_l(\rho)$  (linha azul) para  $d = 4$  em função do parâmetro  $\epsilon$  que determina o quão misto é o estado  $\rho$ .

entropia de emaranhamento. Para um estado não emaranhado, temos  $E_l(\rho) = 0$  e para o estado maximamente misto  $\rho = \frac{\mathbb{I}}{d}$ , a entropia de emaranhamento atinge o valor máximo de

$$E_l\left(\frac{\mathbb{I}}{d}\right) = 1 - \frac{1}{d}. \quad (2.27)$$

Como a entropia de von Neumann envolve os autovalores do operador densidade através da equação (2.21), é necessário diagonalizar  $\rho$ . Por isso, a entropia linear é mais facilmente calculável e será o quantificador de emaranhamento utilizado nesse trabalho ao ser calculada para o estado reduzido (entropia de emaranhamento).

## 2.4 Completeza da Mecânica Quântica — EPR

Trataremos agora do trabalho seminal de Albert Einstein, Boris Podolsky e Nathan Rosen (EPR) [2] que introduziu o conceito de direcionamento EPR. Primeiramente, EPR definem como condição suficiente para completeza de uma teoria física a existência de uma contrapartida na teoria para todo elemento da realidade física<sup>1</sup>. Para estabelecer elementos de realidade física, EPR fazem uso do seguinte critério: “Se, sem alterar o sistema de nenhum modo, podemos prever com certeza (i.e., com probabilidade igual à unidade) o valor de uma quantidade física, então existe um elemento de realidade correspondendo a essa quantidade física.” De acordo com o princípio de incerteza de Heisenberg, a Mecânica Quântica não fornece valores simultâneos para observáveis incompatíveis. Logo, conclui-se que ou (I) não existem elementos de realidade simultâneos para esses observáveis ou (II) a Mecânica Quântica é incompleta. Pois, se a hipótese (I) fosse falsa, isto é, se existissem tais elementos de realidade simultâneos, então, pela definição

<sup>1</sup>O conceito de realidade física associado a uma grandeza física está relacionado à esta quantidade ter ou não um valor bem definido. Por exemplo, sabe-se que, de acordo com a Mecânica Quântica, os observáveis de posição  $q$  e de momento  $p$  não podem ser determinados simultaneamente com precisão arbitrária. Portando, ao se estabelecer com alto grau de precisão (baixa variância) a posição de um certo sistema, diminui-se o conhecimento que se tem sobre o seu momento (alta variância), de modo que  $p$  não tem, nesse caso, um elemento de realidade, ou não é “real”.

de completeza, eles estariam contidos dentro de uma teoria física completa, o que não ocorre com a Mecânica Quântica, e, portanto, (II) seria verdadeira. Outrossim, se (II) fosse falsa, então os elementos de realidade correspondentes à observáveis incompatíveis não podem existir pois não estão contemplados pela Mecânica Quântica, logo (I) seria verdadeiro.

Dado essa dicotomia, considera-se um estado puro não separável bipartido  $|\Psi\rangle$ . Ao expandir o primeiro subsistema — aqui denotado por sistema da Alice — em duas bases ortogonais  $\{|u_n\rangle\}$  e  $\{|v_n\rangle\}$  compostas, respectivamente, por autokets de dois observáveis  $A_1$  e  $A_2$  atuando no espaço de Alice, temos

$$|\Psi\rangle = \sum_n a_n |u_n\rangle \otimes |\psi_n\rangle = \sum_n b_n |v_n\rangle \otimes |\phi_n\rangle, \quad (2.28)$$

onde  $|\psi_n\rangle$  e  $|\phi_n\rangle$  são estados no espaço de Bob. Logo, dependendo da escolha do observável medido por Alice, podemos projetar o estado do segundo subsistema — subsistema do Bob — para  $|\psi_n\rangle$  ou  $|\phi_n\rangle$  sem interferir diretamente nele.

Considerando um estado como (2.28) (o argumento original, porém, é feito em termos de funções de onda ao invés de kets de estado), EPR argumentam que escolhendo sua base de medição, Alice definirá o elemento de realidade no laboratório de Bob. Porém, com a hipótese de localidade tacitamente assumida por EPR, a realidade no laboratório remoto de Bob não pode ser alterada por medições no de Alice. Logo, EPR concluem que para um estado como (2.28) os elementos de realidade associados a  $|\psi_n\rangle$  e  $|\phi_n\rangle$  devem existir simultaneamente (já a partir da preparação do estado), pois a realidade não pode ser determinada por ações à distância. Ora, se ambas as quantidades são elementos de realidade e a Mecânica Quântica não dá valores a elas, então (I) é falsa e (II) é a opção correta.

Por fim, EPR sugerem que a Mecânica Quântica deverá ser eventualmente completada por teorias que envolvam variáveis ainda inacessíveis, hoje conhecidas como variáveis ocultas.

## 2.5 Não localidade de Bell

Em 1964, John Bell [3] deduz a sua desigualdade ao buscar mostrar que não é possível fazer o que EPR queriam, a saber, encontrar uma teoria que respeitasse causalidade local e ainda assim ser compatível com os resultados (corretos) da MQ. Para valores esperados em geral,  $\langle AB \rangle$  não é igual a  $\langle A \rangle \langle B \rangle$ , pois pode haver correlações na estatística (mesmo clássica). Porém, a hipótese implementada é que, se os subsistemas estiverem suficientemente afastados, talvez haja variáveis ocultas locais (local hidden variables ou LHV's)  $\lambda$  que, se conhecidas, possibilitariam a escrita dos valores esperados na forma de uma soma convexa de valores médios separáveis, cada um dependendo apenas do que ocorre na seu sítio, na sua localidade. Ou seja, o argumento de Bell é de que o valor esperado de quantidades físicas  $A$  e  $B$  medidas, respectivamente, nos laboratórios de Alice e de Bob, possa ser escrito como

$$\langle A \otimes B \rangle = \sum_{\lambda} p(\lambda) \langle A \rangle_{\lambda} \langle B \rangle_{\lambda}, \quad (2.29)$$

onde  $\langle A \rangle_{\lambda}$  e  $\langle B \rangle_{\lambda}$  são valores esperados dependentes apenas de medições locais e da variável oculta  $\lambda$ .



Considerando os observáveis de spin  $D_1 = \vec{\sigma} \cdot \vec{d}_1$ ,  $D_2 = \vec{\sigma} \cdot \vec{d}_2$  e  $D_3 = \vec{\sigma} \cdot \vec{d}_3$ , definidos pelas direções dadas por vetores  $\vec{d}_1, \vec{d}_2, \vec{d}_3$  e pelo vetor de matrizes de Pauli  $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ , e partindo de (2.29), Bell obtém a desigualdade

$$| \langle D_1 \otimes D_2 \rangle - \langle D_1 \otimes D_3 \rangle | \leq 1 + \langle D_2 \otimes D_3 \rangle, \quad (2.30)$$

a qual, se violada, implica na violação da hipótese de localidade (2.29). Utilizando o fato de que para o estado singleto temos  $\langle \vec{\sigma} \cdot \vec{d}_1 \otimes \vec{\sigma} \cdot \vec{d}_2 \rangle = -\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2$ , vê-se que facilmente pode-se violar a desigualdade (2.30). Basta, por exemplo, escolher direções tais que  $\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_3 = 0$  e  $\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 = \vec{d}_2 \cdot \vec{d}_3 = 1/\sqrt{2}$ , de modo que (2.30) se torna

$$\begin{aligned} | -\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 + \vec{d}_1 \cdot \vec{d}_3 | &\leq 1 - \vec{d}_2 \cdot \vec{d}_3 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} &\leq 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{2} &\leq 1. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Esse exemplo mostra, por contradição, que existem estados que são incompatíveis com uma teoria de variáveis ocultas locais e, consequentemente, com uma descrição local do modo formulado por Bell, resultado que é conhecido como teorema de Bell.

Mencionaremos ainda, para futura referência, outro teste para detectar não localidade desenvolvido em 1969 por Clauser, Horne, Shimony e Holt (CHSH) [4], que desenvolveram a seguinte desigualdade

$$S = | \langle D_1 \otimes D_3 \rangle + \langle D_1 \otimes D_4 \rangle + \langle D_2 \otimes D_3 \rangle - \langle D_2 \otimes D_4 \rangle | \leq 2, \quad (2.32)$$

onde são considerados observáveis de spin  $D_i = \vec{\sigma} \cdot \vec{d}_i$  dados pelas direções dos vetores  $\vec{d}_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ). Não localidade é identificada quando a desigualdade é violada.

Com a finalidade de reformular a condição de localidade de Bell em termos de probabilidades, escrevemos a definição de valor esperado

$$\langle A \rangle = \sum_a a p(a|A), \quad (2.33)$$

onde  $p(a|A)$  é a probabilidade condicional de obter o resultado  $a$  dado a quantidade  $A$ , para expressar (2.29) como

$$\begin{aligned} \langle A \otimes B \rangle &= \sum_{\lambda} p(\lambda) \left( \sum_a a p(a|A, \lambda) \right) \left( \sum_b b p(b|B, \lambda) \right) \\ &= \sum_{a,b} a b \sum_{\lambda} p(\lambda) p(a|A, \lambda) p(b|B, \lambda) \\ &= \sum_{a,b} a b p(a, b|A, B), \end{aligned} \quad (2.34)$$

onde identificamos

$$p(a, b|A, B) = \sum_{\lambda} p(\lambda) p(a|A, \lambda) p(b|B, \lambda). \quad (2.35)$$

Esta é geralmente chamada de hipótese de causalidade local, pois a probabilidade  $p(a|A, \lambda)$  no laboratório de Alice não depende da medição de  $B$  ou do resultado  $b$  no laboratório de Bob.

## 2.6 Direcionamento EPR (EPR *Steering*)

Ilustraremos o comportamento introduzido pela equação (2.28) com um exemplo. Seja

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle_z \otimes |-\rangle_z - |-\rangle_z \otimes |+\rangle_z) \quad (2.36)$$

o estado singlete escrito na base de autovalores de  $S_z$ . Usando a relação  $|\pm\rangle_z = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle_x \pm |-\rangle_x)$  entre os autokets de  $S_z$  e  $S_x$ , podemos mudar a base do estado da Alice e reescrever a equação (2.36) como

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{|+\rangle_x}{\sqrt{2}} \otimes (|-\rangle_z - |+\rangle_z) + \frac{|-\rangle_x}{\sqrt{2}} \otimes (|-\rangle_z + |+\rangle_z) \right]. \quad (2.37)$$

Portanto, vemos que se a Alice decide medir  $S_z$ , então o estado do Bob estará em um dos autoestados de  $S_z$ . Porém, se a Alice decide medir  $S_x$ , o estado do Bob é projetado para  $\frac{1}{\sqrt{2}} (|-\rangle_z \pm |+\rangle_z)$ . É nesse sentido que, através de medições locais, Alice pode "direcionar" o estado de que Bob disporá em seu laboratório.

### 2.6.1 Direcionamento EPR como uma tarefa quântica

Para obter uma definição rigorosa de direcionamento EPR, seguiremos o trabalho de 2007 por Wiseman, Jones e Doherty [20], onde ele é estudado em termos de uma tarefa quântica envolvendo duas partes, Alice e Bob, e a proposta é de que direcionamento EPR é demonstrado apenas se Alice conseguir convencer Bob de que o estado que eles compartilham é emaranhado. Bob acredita na Mecânica Quântica, mas não confia nas informações dadas por Alice, que prepara um sistema bipartido e manda uma parte para Bob. Em seguida, eles medem seus respectivos subsistemas e se comunicam classicamente (por exemplo, através de um telefone). Para obter uma estatística, esse procedimento pode ser reproduzido várias vezes. Lembrando que a prescrição da Mecânica Quântica para o estado de Bob condicionado ao autovalor  $a$  do observável  $A$  medido por Alice é

$$\rho_{\mathcal{B}|A=a} = \frac{\text{Tr}_{\mathcal{A}}[\rho(\Pi_a^A \otimes \mathbb{1})]}{p_{a|A}}, \quad (2.38)$$

onde  $p_{a|A} = \text{Tr}[\rho(\Pi_a^A \otimes \mathbb{1})]$  é a probabilidade de se obter o autovalor  $a$  dado o observável  $A$ , a tarefa é como segue:

1. Antes das medidas serem executadas, Alice informa a Bob o conjunto de *ensembles*  $\{E_{\mathcal{B}|A}\}$  para os quais ela pode colapsar o estado que ele recebeu, onde

$$E_{\mathcal{B}|A} = \{\rho_{\mathcal{B}|A=a} : a \in \eta(A)\}, \quad (2.39)$$

e  $\eta(A)$  é o conjunto de autovalores de um observável  $A$ .

Para fazer uma conexão com o exemplo anterior, escreveremos o operador densidade (2.1) do estado singlete (2.36):

$$\rho = \frac{1}{2} \left( |+\rangle_z \langle +|_z \otimes |-\rangle_z \langle -|_z + |-\rangle_z \langle -|_z \otimes |+\rangle_z \langle +|_z - |+\rangle_z \langle +|_z \otimes |-\rangle_z \langle -|_z - |-\rangle_z \langle -|_z \otimes |+\rangle_z \langle +|_z \right).$$

Então Alice informaria Bob de que, podendo ela medir os observáveis  $S_x$  e  $S_z$ , o estado dele pode ser colapsado para  $E_{\mathcal{B}|S_x} = \{\rho_{\mathcal{B}|S_x=\hbar/2}, \rho_{\mathcal{B}|S_x=-\hbar/2}\}$  ou  $E_{\mathcal{B}|S_z} = \{\rho_{\mathcal{B}|S_z=\hbar/2}, \rho_{\mathcal{B}|S_z=-\hbar/2}\}$ , com

$$\rho_{\mathcal{B}|S_x=\hbar/2} = \frac{\text{Tr}_{\mathcal{A}}[\rho(|+\rangle_x \langle +|_x \otimes \mathbb{I})]}{\text{Tr}[\rho(|+\rangle_x \langle +|_x \otimes \mathbb{I})]} = \frac{1}{2} \left( |-\rangle_z \langle -|_z + |+\rangle_z \langle +|_z - |-\rangle_z \langle +|_z - |+\rangle_z \langle -|_z \right), \quad (2.40)$$

que corresponde ao estado  $|-\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_z - |-\rangle_z)$ . Similarmente,

$$\begin{aligned} \rho_{\mathcal{B}|S_x=-\hbar/2} &= \frac{\text{Tr}_{\mathcal{A}}[\rho(|-\rangle_x \langle -|_x \otimes \mathbb{I})]}{\text{Tr}[\rho(|-\rangle_x \langle -|_x \otimes \mathbb{I})]} \\ &= \frac{1}{2} \left( |-\rangle_z \langle -|_z + |+\rangle_z \langle +|_z + |-\rangle_z \langle +|_z + |+\rangle_z \langle -|_z \right) \Leftrightarrow \text{Estado } |+\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_z + |-\rangle_z), \\ \rho_{\mathcal{B}|S_z=\hbar/2} &= \frac{\text{Tr}_{\mathcal{A}}[\rho(|+\rangle_z \langle +|_z \otimes \mathbb{I})]}{\text{Tr}[\rho(|+\rangle_z \langle +|_z \otimes \mathbb{I})]} = |-\rangle_z \langle -|_z \Leftrightarrow \text{Estado } |-\rangle_z, \\ \rho_{\mathcal{B}|S_z=-\hbar/2} &= \frac{\text{Tr}_{\mathcal{A}}[\rho(|-\rangle_z \langle -|_z \otimes \mathbb{I})]}{\text{Tr}[\rho(|-\rangle_z \langle -|_z \otimes \mathbb{I})]} = |+\rangle_z \langle +|_z \Leftrightarrow \text{Estado } |+\rangle_z. \end{aligned} \quad (2.41)$$

2. Após receber seu estado, Bob aponta aleatoriamente um dos  $E_{\mathcal{B}|A}$  e solicita que Alice prepare o *ensemble* escolhido.

Isso é equivalente a selecionar qual observável  $A$  Alice medirá. No nosso exemplo, Bob escolheria  $S_z$  ou  $S_x$ .

3. Alice mede o observável  $A$  escolhido por Bob e, a partir do resultado obtido, notifica Bob para qual estado  $\rho_{\mathcal{B}|A=a}$  o sistema dele foi colapsado.

Digamos, por exemplo que Bob tenha escolhido  $S_x$ , então, caso o resultado da medida da componente  $x$  do spin no sistema de Alice retorne  $-\frac{\hbar}{2}$  ( $+\frac{\hbar}{2}$ ), ela informa que o estado de Bob é  $|+\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_z + |-\rangle_z)$  ( $|-\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_z - |-\rangle_z)$ ).

4. Após cada realização desse protocolo, Bob realiza tomografia no seu sistema e confirma que o estado anunciado por Alice é realmente o estado que ele possui, com a frequência  $p_{a|A}$ .

Alice, na tentativa de lograr Bob, poderia, na etapa 1, enviar-lhe um estado oculto local (*local hidden state* ou LHS)  $\rho_\lambda$ , ou seja, um estado puro não emaranhado. Seria, portanto, um estado sem qualquer correlação com o de Alice. Na verdade, o sistema em posse de Alice não precisaria sequer ser uma partícula quântica; poderia ser uma simples moeda que Alice usaria para escolher o estado (puro e descorrelacionado) a ser enviado para Bob. Assim sendo, Bob, que não confia em Alice, não estará convencido que o estado que eles compartilham é emaranhado se existir um mapa estocástico  $p(a|A, \lambda)$  tal que, para todo observável  $A$  que Alice possa medir e todo autovalor  $a$  de  $A$ , seja possível expressar o estado não normalizado condicionado de Bob como

$$\tilde{\rho}_{\mathcal{B}|A=a} = \sum_{\lambda} p(a|A, \lambda) p(\lambda) \rho_\lambda, \quad (2.42)$$

onde exclusivamente nesta seção utilizaremos a notação  $\tilde{\rho}_{\mathcal{B}|A=a} = \rho_{\mathcal{B}|A=a} \text{Tr} \rho_{\mathcal{B}|A=a}$ .

Como explicado em [21], caso a condição acima seja satisfeita, então é possível que o responsável por determinar o estado de Bob não seja a escolha da base na qual a Alice faz medidas e o correspondente autovalor obtido, mas as variáveis ocultas  $\{\lambda\}$ , que regulam tanto a probabilidade de Alice obter o resultado  $a$  à medição de  $A$ , quanto o LHS  $\rho_\lambda$  recebido por Bob.

Seguindo a referência [58], podemos reescrever a distribuição de probabilidades  $p(a|A, \lambda)$  como a combinação convexa

$$p(a|A, \lambda) = \sum_{\lambda'} f(\lambda'|\lambda) D(a|A, \lambda'), \quad (2.43)$$

onde  $f(\lambda'|\lambda)$  é o peso de cada elemento da distribuição e  $D(a|A, \lambda')$  é uma distribuição de probabilidades determinística, isto é, dado  $\lambda'$  e  $A$ ,  $D(a|A, \lambda')$  retorna os valores 0 ou 1. Substituindo (2.43) em (2.42), temos

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_{\mathcal{B}|A=a} &= \sum_{\lambda} \sum_{\lambda'} f(\lambda'|\lambda) D(a|A, \lambda') \rho_{\lambda} p(\lambda) \\ &= \sum_{\lambda'} D(a|A, \lambda') \sum_{\lambda} f(\lambda'|\lambda) \rho_{\lambda} p(\lambda) \\ &= \sum_{\lambda'} D(a|A, \lambda') \tilde{\sigma}_{\lambda'}, \end{aligned} \quad (2.44)$$

onde  $\tilde{\sigma}_{\lambda'} = \sum_{\lambda} f(\lambda'|\lambda) \rho_{\lambda} p(\lambda)$ . Concluí-se então que caso o estado não normalizado condicionado de Bob possa ser escrito como (2.42), então Alice poderia valer-se de uma estratégia determinística para, tendo conhecimento de  $D(a|A, \lambda')$ , anunciar o resultado  $a$  e enviar o estado local não emaranhado  $\sigma_{\lambda'}$  — que não depende da escolha do observável  $A$  ou do resultado  $a$  — para Bob. [21]

É esclarecedor exibir o exemplo estudado em [21], no qual, em contraste com o exemplo do início dessa seção, não há direcionamento EPR. Considera-se o estado misto separável

$$\rho = \frac{|+\rangle_z \langle +|_z \otimes |+\rangle_z \langle +|_z + |-\rangle_z \langle -|_z \otimes |-\rangle_z \langle -|_z}{2}. \quad (2.45)$$

Nesse caso, se Alice faz medições de  $S_z$  e obtém  $\hbar/2$  (spin para cima), o estado de Bob será

$$\rho_{\mathcal{B}|S_z=\hbar/2} = \frac{\text{Tr}_{\mathcal{A}}[\rho(|+\rangle_z \langle +|_z \otimes \mathbb{1})]}{\text{Tr}[\rho(|+\rangle_z \langle +|_z \otimes \mathbb{1})]} = |+\rangle_z \langle +|_z, \quad (2.46)$$

e, se ela obtém spin para baixo, o estado condicionado de Bob é

$$\rho_{\mathcal{B}|S_z=-\hbar/2} = \frac{\text{Tr}_{\mathcal{A}}[\rho(|-\rangle_z \langle -|_z \otimes \mathbb{1})]}{\text{Tr}[\rho(|-\rangle_z \langle -|_z \otimes \mathbb{1})]} = |-\rangle_z \langle -|_z. \quad (2.47)$$

Portanto os sistemas de Alice e Bob são correlacionados. Porém, não há direcionamento EPR neste caso, pois em uma das repetições da tarefa quântica na qual Bob escolhe, no passo 2, o observável  $S_x$ , o estado de Bob após a medição de Alice é independente do resultado obtido por ela. Este resultado surge pois, se ela obtém spin para cima, então

$$\rho_{\mathcal{B}|S_x=\hbar/2} = \frac{\text{Tr}_{\mathcal{A}}[\rho(|+\rangle_x \langle +|_x \otimes \mathbb{1})]}{\text{Tr}[\rho(|+\rangle_x \langle +|_x \otimes \mathbb{1})]} = \frac{|+\rangle_z \langle +|_z + |-\rangle_z \langle -|_z}{2} = \frac{\mathbb{1}}{2}, \quad (2.48)$$

e se ela obtém spin para baixo, o estado condicionado de Bob é o mesmo estado maximamente misto

$$\rho_{\mathcal{B}|S_x=-\hbar/2} = \frac{\text{Tr}_{\mathcal{A}}[\rho(|-\rangle_x \langle -|_x \otimes \mathbb{1})]}{\text{Tr}[\rho(|-\rangle_x \langle -|_x \otimes \mathbb{1})]} = \frac{|+\rangle_z \langle +|_z + |-\rangle_z \langle -|_z}{2} = \frac{\mathbb{1}}{2}, \quad (2.49)$$

com a probabilidade 1/2 de Bob obter spin para cima ou para baixo.

### Princípio de não-sinalização

De acordo com David Bohm

Se há uma conexão não local entre partículas distantes, o que podemos dizer sobre a possibilidade de usá-la para enviar sinais de umas dessas partículas para a outra? [...] Mostraremos que isso não é possível, do que segue que correlações EPR não permitem a transmissão de sinais de qualquer tipo (incluindo, por exemplo, aqueles mais rápidos que a luz). (Bohm; Hiley, 1993, p. 139)[59]

É instrutivo perceber que, antes de Alice comunicar o seu resultado a Bob, a melhor descrição que ele poderia ter do estado dele é a soma de todos os estados possíveis para ele ponderados pelas respectivas probabilidades de ocorrência, isto é

$$\begin{aligned} \rho_{\mathcal{B}} &= \sum_a p_{a|A} \rho_{\mathcal{B}|A=a} \\ &= \text{Tr}_{\mathcal{A}} \left[ \rho \left( \sum_a \Pi_a^A \otimes \mathbb{1} \right) \right] \\ &= \text{Tr}_{\mathcal{A}}[\rho], \end{aligned} \quad (2.50)$$

onde  $\sum_a \Pi_a^A = \mathbb{1}$ , ou seja, é simplesmente o descarte dos graus de liberdade do subsistema  $\mathcal{A}$ , de modo que o estado de Bob não guarda informação de que grandeza é medida por Alice. Se fosse assim, se Bob tivesse tal informação, então Alice poderia transmitir informação através de sua escolha de medição. Em outras palavras, na tarefa quântica acima, Bob só consegue perceber o colapso do seu estado após Alice lhe comunicar classicamente qual resultado ela obteve quando mediu  $A$ , concordando assim com o princípio de não-sinalização que, se violado, permitiria o envio de informação superlumínica.

### Direcionamento EPR em termos de probabilidades

Podemos obter uma definição de um estado direcionável em termos de probabilidades que podem ser medidas no laboratório. Substituindo o estado não normalizado condicionado (2.42) em (2.18), obtém-se que um estado  $\rho$  não é direcionável se for possível escrevê-lo da forma

$$\begin{aligned} p(a, b|A, B; \rho) &= \text{Tr}[\hat{\Pi}_b^B \tilde{\rho}_{\mathcal{B}|A=a}] \\ &= \sum_{\lambda} p(\lambda) p(a|A, \lambda) \text{Tr}[\Pi_b^B \rho_{\lambda}] \\ &= \sum_{\lambda} p(\lambda) p(a|A, \lambda) p_q(b|B, \rho_{\lambda}), \end{aligned} \quad (2.51)$$

isto é, se existir um conjunto de variáveis ocultas permitindo que as probabilidades de obter os autovalores  $\{a, b\}$  dos respectivos observáveis  $\{A, B\}$  se separem de modo que a probabilidade

correspondente ao subsistema de Bob seja compatível com um estado quântico, mas sem essa restrição para a distribuição de Alice.

### 2.6.2 Variáveis discretas

Para detectar direcionamento EPR em sistemas de variáveis discretas, Cavalcanti, Jones, Wiseman e Reid (CJWR) [31] desenvolveram a desigualdade

$$F = \frac{1}{\sqrt{n}} \left| \sum_i^n \langle A_i \otimes B_i \rangle \right| \leq 1, \quad (2.52)$$

onde  $\langle A_i \otimes B_i \rangle = \text{Tr}(A_i \otimes B_i \rho)$  e Alice e Bob medem  $n = 2, 3$  direções do observável de spin dados, respectivamente, por  $A_i = \hat{u}_i \cdot \sigma$  e  $B_i = \hat{v}_i \cdot \sigma$ , onde  $\sigma = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$  é o vetor cujas componentes são matrizes de Pauli,  $\hat{u}_i$  são vetores unitários e  $\hat{v}_i$  são vetores unitários e ortogonais. Quando a desigualdade é violada, dizemos que o estado é direcionável.

### 2.6.3 Variáveis contínuas

Sendo o objetivo principal deste trabalho desenvolver um critério para detectar direcionamento EPR para variáveis contínuas, é pertinente dedicarmos um espaço para um estudo mais detalhado dos dois principais critérios existentes na literatura: o critério de Reid [34] e o critério entrópico proposto por Walborn *et al.* [35]. As contas reproduzidas abaixo seguem a abordagem de Chowdhury *et al.* [36] no estudo dos dois critérios supracitados.

#### Critério de Reid

Considere o modelo de campo eletromagnético dado por  $\hat{E}_\lambda = \lambda(\hat{\gamma}e^{-i\omega_\gamma t} + \hat{\gamma}^\dagger e^{i\omega_\gamma t})$ , onde  $\hat{\gamma} = \hat{a}$ ,  $\hat{\gamma}^\dagger = \hat{b}$  são os operadores bosônicos de aniquilação de dois modos distintos,  $\omega_\gamma$  é a frequência do modo e  $\lambda$  é uma constante que incorpora os fatores espaciais. Escreve-se as quadraturas do campo como

$$\begin{aligned} \tilde{A}_\alpha &= \tilde{Q}_\mathcal{A} \cos \alpha + \tilde{P}_\mathcal{A} \sin \alpha \\ \tilde{B}_\beta &= \tilde{Q}_\mathcal{B} \cos \beta + \tilde{P}_\mathcal{B} \sin \beta, \end{aligned} \quad (2.53)$$

onde  $(\alpha, \beta) \in [0, 2\pi]$  e, em vez de usarmos o observável  $Q_\mathcal{A}$  ( $Q_\mathcal{B}$ ) de posição e o observável  $P_\mathcal{A}$  ( $P_\mathcal{B}$ ) de momento de Alice (Bob), trabalha-se com os observáveis adimensionais

$$\tilde{Q}_\mathcal{A} = \frac{\sqrt{2}}{s_0} Q_\mathcal{A}, \quad \tilde{Q}_\mathcal{B} = \frac{\sqrt{2}}{s_0} Q_\mathcal{B}, \quad \tilde{P}_\mathcal{A} = \frac{s_0}{\sqrt{2}\hbar} P_\mathcal{A}, \quad \tilde{P}_\mathcal{B} = \frac{s_0}{\sqrt{2}\hbar} P_\mathcal{B}, \quad (2.54)$$

onde  $s_0$  é um parâmetro não negativo com dimensão de posição.

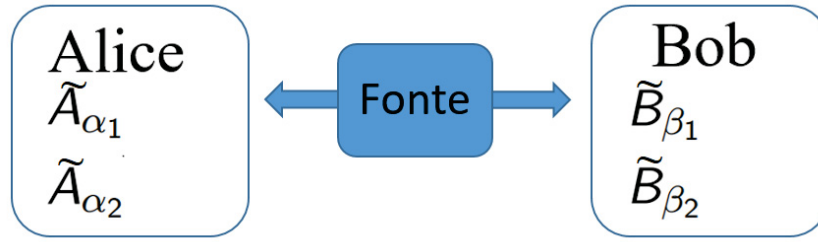


Figura 2.2: No modelo proposto por Reid, parte de um sistema emaranhado é enviado para Alice e a outra parte é enviada para Bob. Alice, através das medidas  $\tilde{A}_\alpha$  realizadas por ela, estima os resultados  $\tilde{B}_\beta$  obtidos por Bob. Tal inferência é possível devido às correlações quânticas do sistema emaranhado compartilhado por eles.

O cenário imaginado por Reid é o ilustrado na figura 2.2. Considera-se um estado bipartido em  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$ , onde o subsistema  $\mathcal{A}$  é enviado para o laboratório de Alice, que mede os observáveis  $\tilde{A}_{\alpha_1}$  e  $\tilde{A}_{\alpha_2}$ , e o subsistema  $\mathcal{B}$  é enviado para o laboratório de Bob, que mede os observáveis  $\tilde{B}_{\beta_1}$  e  $\tilde{B}_{\beta_2}$ . O critério de Reid se baseia na possibilidade de, através das correlações, inferir a quadratura  $\tilde{B}_\beta$  a partir da medida de  $\tilde{A}_\alpha$ . Dessa maneira, a amplitude estimada  $\tilde{B}_\beta^e$ , suposta como sendo proporcional a  $\tilde{A}_\alpha$ , é dada por

$$\begin{aligned}\tilde{B}_{\beta_1}^e &= d_1 \tilde{A}_{\alpha_1}, \\ \tilde{B}_{\beta_2}^e &= d_2 \tilde{A}_{\alpha_2},\end{aligned}\tag{2.55}$$

onde  $d_1$  e  $d_2$  são as constantes de proporcionalidade.

Reid define a incerteza da quadratura como o valor esperado do quadrado da diferença da quadratura  $\tilde{B}_\beta$  e a quadratura inferida  $\tilde{B}_\beta^e$ , isto é

$$\begin{aligned}(\Delta \tilde{B}_{\beta_1})^2 &= \langle (\tilde{B}_{\beta_1} - \tilde{B}_{\beta_1}^e)^2 \rangle, \\ (\Delta \tilde{B}_{\beta_2})^2 &= \langle (\tilde{B}_{\beta_2} - \tilde{B}_{\beta_2}^e)^2 \rangle.\end{aligned}\tag{2.56}$$

Minimiza-se a incerteza  $(\Delta \tilde{B}_\beta)^2$  em relação a  $d_1$  e  $d_2$  fazendo  $\frac{\partial((\Delta \tilde{B}_{\beta_1})^2)}{\partial d_1} = \frac{\partial((\Delta \tilde{B}_{\beta_2})^2)}{\partial d_2} = 0$  e obtém-se

$$\begin{aligned}d_1 &= \frac{\langle \tilde{A}_{\alpha_1} \tilde{B}_{\beta_1} \rangle}{\langle \tilde{A}_{\alpha_1}^2 \rangle}, \\ d_2 &= \frac{\langle \tilde{A}_{\alpha_2} \tilde{B}_{\beta_2} \rangle}{\langle \tilde{A}_{\alpha_2}^2 \rangle}.\end{aligned}\tag{2.57}$$

Com o uso as relações de comutação  $[\tilde{Q}_\mathcal{A}, \tilde{P}_\mathcal{A}] = [\tilde{Q}_\mathcal{B}, \tilde{P}_\mathcal{B}] = i$  e o princípio de incerteza generalizado

$$\sigma_A^2 \sigma_B^2 \geq \left( \frac{1}{2i} \langle [A, B] \rangle \right)^2,\tag{2.58}$$

onde  $\sigma_A^2 = \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2$  é a variância associada ao observável  $A$  e similarmente para o observável  $B$ , tem-se

$$\begin{aligned}
 (\Delta \tilde{B}_{\beta_1})^2 (\Delta \tilde{B}_{\beta_2})^2 &\geq \left( \frac{1}{2i} \langle [\tilde{B}_{\beta_1}, \tilde{B}_{\beta_2}] \rangle \right)^2 \\
 &= \left( \frac{1}{2i} \langle [\tilde{Q}_{\mathcal{A}} \cos \beta_1 + \tilde{P}_{\mathcal{A}} \sin \beta_1, \tilde{Q}_{\mathcal{A}} \cos \beta_2 + \tilde{P}_{\mathcal{A}} \sin \beta_2] \rangle \right)^2 \\
 &= \left( \frac{1}{2i} \langle \cos \beta_1 \sin \beta_2 [\tilde{Q}_{\mathcal{A}}, \tilde{P}_{\mathcal{A}}] + \cos \beta_2 \sin \beta_1 [\tilde{P}_{\mathcal{A}}, \tilde{Q}_{\mathcal{A}}] \rangle \right)^2 \\
 &= \frac{1}{4} \sin^2 (\beta_1 - \beta_2) = \frac{1}{4},
 \end{aligned} \tag{2.59}$$

onde, com o objetivo de majorar a cota inferior da desigualdade (2.58), é feito

$$\beta_1 - \beta_2 = \frac{\pi}{2} \tag{2.60}$$

na última linha. Obtém-se então em (2.59) um critério para detectar direcionamento EPR, sendo que  $(\Delta \tilde{B}_{\beta_1})^2$  e  $(\Delta \tilde{B}_{\beta_2})^2$  são calculadas utilizando-se as equações (2.55), (2.56) e (2.57). Caso a desigualdade seja violada, as inferências feitas a partir das correlações não satisfazem o princípio de incerteza de Heisenberg e dizemos então que o sistema é direcionável.

A intuição por trás desse modelo é o analisado na seção 2.4: na equação (2.28) as correlações são tais que é possível usá-las para prever elementos de realidade simultâneos para observáveis incompatíveis, informação esta não fornecida pela Mecânica Quântica. Aqui temos o mesmo cenário: o estado é EPR direcionável se as correlações possibilitam previsões para o subespaço de Bob (através da equação (2.55)) mais precisas do que as permitidas pelo princípio de incerteza da Mecânica Quântica.

Em um dos subsistemas tem-se a restrição  $\beta_1 - \beta_2 = \frac{\pi}{2}$ , porém, no outro subsistema, ainda há a liberdade de escolha de  $(\alpha_1, \alpha_2)$ . Tais parâmetros são selecionados de forma a maximizar as correlações entre os dois subsistemas, as quais são capturadas pelo coeficiente de correlação

$$C_{\alpha, \beta} := \frac{\langle \tilde{A}_{\alpha} \tilde{B}_{\beta} \rangle}{\sqrt{\langle \tilde{A}_{\alpha}^2 \rangle \langle \tilde{B}_{\beta}^2 \rangle}}. \tag{2.61}$$

Desse modo, Chowdhury *et al.*, utilizando as equações (2.55) e (2.57), reescrevem a incerteza (2.56) em termos do coeficiente de correlação maximizado ( $C_{\alpha, \beta}^{\max}$ ) como

$$(\Delta \tilde{B}_{\beta})^2 = \langle \tilde{B}_{\beta}^2 \rangle \left( 1 - (C_{\alpha, \beta}^{\max})^2 \right). \tag{2.62}$$

Dessa maneira, reescreve-se o critério de Reid como a seguir.

**Critério de Reid:** Um estado é EPR direcionável se

$$(\Delta \tilde{B}_{\beta_1})^2 (\Delta \tilde{B}_{\beta_2})^2 = \langle \tilde{B}_{\beta_1}^2 \rangle \langle \tilde{B}_{\beta_2}^2 \rangle \left( 1 - \frac{\langle \tilde{A}_{\alpha_1} \tilde{B}_{\beta_1} \rangle^2}{\langle \tilde{A}_{\alpha_1}^2 \rangle^2} \right) \left( 1 - \frac{\langle \tilde{A}_{\alpha_2} \tilde{B}_{\beta_2} \rangle^2}{\langle \tilde{A}_{\alpha_2}^2 \rangle^2} \right) < \frac{1}{4}, \tag{2.63}$$

onde  $\beta_1 - \beta_2 = \frac{\pi}{2}$  e é realizada a minimização das incertezas em função de  $(\alpha_1, \alpha_2)$ .



### Critério entrópico

Começaremos recordando as regras de probabilidade condicional

- (i)  $p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$ ,
- (ii)  $p(A \cap B \cap C) = p(C)p(B|C)p(A|B \cap C)$ ,
- (iii)  $p(A|B) = \frac{p(B|A)p(A)}{p(B)}$  (Teorema de Bayes).

Aqui  $p(A|B)$  denota a probabilidade de ocorrer o evento  $A$  dado que ocorreu o evento  $B$  e  $p(A \cap B) = p(A, B)$  é a probabilidade de acontecer ambos os eventos  $A$  e  $B$ . Sendo  $r_a$  e  $r_b$  resultados obtidos de medições das quantidades  $R_a$  (medida por Alice) e  $R_b$  (medida por Bob), respectivamente, temos, da propriedade (i),  $p(r_b, \lambda|r_a) = p(r_a, r_b, \lambda)/p(r_a)$ . Esse resultado, junto com a propriedade (ii), leva à  $p(r_b, \lambda|r_a) = p(\lambda, r_a)p_q(r_b|\lambda, r_a)$ , onde, de acordo com (2.51), já rotulamos a probabilidade correspondente ao subsistema de Bob como sendo consistente com um estado quântico. Agora, relembando o final da seção 2.6.1, pode-se, pela condição de localidade, fazer  $p(r_b|\lambda, r_a) = p(r_b|\lambda)$ , de modo que

$$p(r_b, \lambda|r_a) = p(\lambda|r_a)p_q(r_b|\lambda). \quad (2.64)$$

Usando (2.64) tem-se que

$$p(r_b|r_a) = \sum_{\lambda} p(r_b, \lambda|r_a) = \sum_{\lambda} p(\lambda|r_a)p_q(r_b|\lambda). \quad (2.65)$$

Utilizando-se do teorema de Bayes como  $p(r_a|\lambda) = p(\lambda|r_a)p(r_a)/p(\lambda)$ , junto com  $p(r_b|r_a) = p(r_a, r_b)/p(r_a)$ , pode-se perceber que (2.65) é equivalente à hipótese de não direcionabilidade (2.51) escrita como  $p(r_a, r_b) = \sum_{\lambda} p(\lambda)p(r_a|\lambda)p_q(r_b|\lambda)$ .

Considera-se agora a não-negatividade da entropia relativa, definida para duas distribuições  $p(X)$  e  $q(X)$  como  $S[p(X)||q(X)] = \sum_x p_x \ln \frac{p_x}{q_x}$ , calculada para as probabilidades  $p(r_b, \lambda|r_a)$  e  $p(\lambda|r_a)p_q(r_b|\lambda)$ , e, integrando em relação à  $r_b$ , obtém-se a desigualdade

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{\lambda} \int dr_b p(r_b, \lambda|r_a) \ln \frac{p(r_b, \lambda|r_a)}{p(\lambda|r_a)p_q(r_b|\lambda)} \\ &= \sum_{\lambda} \int dr_b p(\lambda|r_a)p_q(r_b|\lambda) \ln \frac{p_q(r_b|\lambda)}{p(r_b|r_a)}. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Assim, fazendo a média com  $p(r_a)$ , tem-se

$$\begin{aligned} &\sum_{\lambda} \int dr_a dr_b p(r_a) p(\lambda|r_a) p_q(r_b|\lambda) \ln p_q(r_b|\lambda) \\ &\geq \int dr_a dr_b p(r_a) \ln p(r_b|r_a) \sum_{\lambda} p(\lambda|r_a) p_q(r_b|\lambda) \\ &= \int dr_a dr_b p(r_b|r_a) p(r_a) \ln p(r_b|r_a) \\ &= \int dr_a dr_b p(r_a, r_b) \ln p(r_b|r_a) \end{aligned} \quad (2.67)$$

Então, usando a entropia de Shannon  $h_q(R_b|\lambda) = - \int dr_b p_q(r_b|\lambda) \ln p_q(r_b|\lambda)$  e a entropia condicional  $h(R_b|R_a) = - \int dr_a dr_b p(r_a, r_b) \ln p(r_b|r_a)$ , chega-se em

$$\sum_{\lambda} \int dr_a p(r_a) p(\lambda|r_a) (-h_q(R_b|\lambda)) \geq -h(R_b|R_a). \quad (2.68)$$

Logo, obtém-se a relação

$$h(R_b|R_a) \geq \sum_{\lambda} p(\lambda) h_q(R_b|\lambda). \quad (2.69)$$

A partir de (2.69), considera-se as grandezas de posição  $Q$  e momento  $P$  e a quantidade

$$h_q(Q_b|Q_a) + h_q(P_b|P_a) \geq \sum_{\lambda} p(\lambda) [h_q(Q_b|\lambda) + h_q(P_b|\lambda)] \quad (2.70)$$

Aplicando a relação de incerteza entrópica [60]  $h_q(Q) + h_q(P) \geq \ln \pi e$  para cada um dos estados rotulados por  $\lambda$  em (2.70) obtém-se

$$h_q(Q_b|Q_a) + h_q(P_b|P_a) \geq \sum_{\lambda} p(\lambda) (\ln \pi e) = \ln \pi e, \quad (2.71)$$

pois  $\{p_{\lambda}\}$  é uma distribuição normalizada, e chega-se no

**Crítério Entrópico:** Direcionamento EPR é detectado quando<sup>2</sup>

$$h(Q_{\mathcal{B}}|Q_{\mathcal{A}}) + h(P_{\mathcal{B}}|P_{\mathcal{A}}) < \ln \pi e. \quad (2.72)$$

Após obter o critério acima, Walborn *et al.* [35] também mostram que o critério de Reid pode ser obtido a partir do critério entrópico.

## 2.7 Hierarquia das correlações

Por simplicidade, reescrevemos abaixo as relações de probabilidades para as correlações

**Localidade de Bell:**  $p(a, b|A, B) = \sum_{\lambda} p(\lambda) p(a|A, \lambda) p(b|B, \lambda);$

**Não Direcionabilidade:**  $p(a, b|A, B) = \sum_{\lambda} p(\lambda) p(a|A, \lambda) p_q(b|B, \lambda);$

**Separabilidade:**  $p(a, b|A, B) = \sum_{\lambda} p(\lambda) p_q(a|A, \lambda) p_q(b|B, \lambda).$

Então, seja  $p(a, b|A, B)$  a distribuição de probabilidade conjunta levantada empiricamente (via medições no laboratório). Se for possível reproduzi-la com um modelo como o da primeira linha, para quaisquer probabilidades marginais (i.e., usando-se qualquer teoria), então diremos que o estado do sistema não apresenta não localidade de Bell. Como neste caso podemos usar qualquer teoria para reproduzir a probabilidade conjunta, apenas uma classe muito restrita de estados não será compatível com tal hipótese e, portanto, apresentará não localidade de Bell. Considere agora que façamos a restrição de que, na parte de Bob, a teoria utilizada seja a MQ. Isso restringe um pouco nosso poder de simulação da probabilidade conjunta, de modo que teremos mais estados cujas estatísticas não poderão ser escrita como na segunda linha. Por último, considere a restrição (mais forte) de que ambas distribuições marginais sejam compatíveis com a

<sup>2</sup>aqui voltamos a usar a notação  $\mathcal{A}$  para denotar o subsistema de Alice e  $\mathcal{B}$  para o subsistema de Bob.

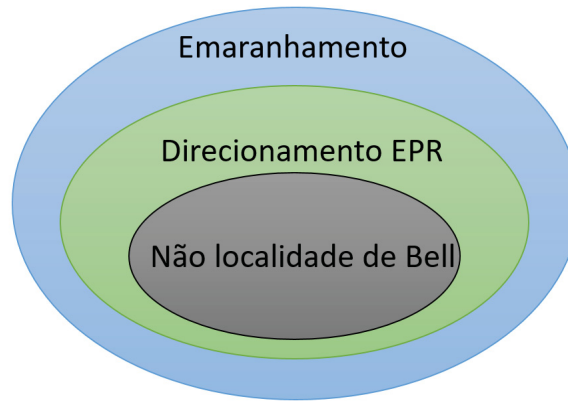


Figura 2.3: Diagrama de Venn representando a hierarquia dos recursos quânticos. Todo estado Bell não local também é EPR direcionável, assim como todo estado EPR direcionável é emaranhado.

MQ. Assim, teremos pouca liberdade para explicar a probabilidade conjunta experimental com um modelo separável e muitos estados não serão descritos como na linha três.

Considerando agora o caminho de volta, se um estado tiver estatística descritível como na linha 3 (estado separável), então certamente tal estatística também será descritível pela hipótese da linha 2, pois  $p_q(a|A, \lambda)$  é um caso particular de  $p(a|A, \lambda)$ . Da mesma forma, todo estado satisfazendo não-direcionalidade também satisfará localidade de Bell.

Segue do exposto acima a seguinte noção de hierarquia de recursos não-clássicos (ou de não-classicalidades):

$$\text{Não Localidade de Bell} \Rightarrow \text{Direcionamento EPR} \Rightarrow \text{Emaranhamento}. \quad (2.73)$$

Mais do que isso, mostra-se na referência [61] que o conjunto de todos os estados Bell não locais é um subconjunto próprio do conjunto de todos os estados direcionáveis que, por sua vez, é um subconjunto próprio do conjunto de todos os estados emaranhados. Em outras palavras, existem estados que são emaranhados mas não são direcionáveis, assim como existem estados direcionáveis que são Bell locais, como ilustrado na figura 2.3.

Consideremos agora o caso particular de estados puros. Como é possível ver a partir da equação (2.28), todo estado puro emaranhado também é direcionável pois sempre podemos expandir um dos subsistemas em bases distintas e assim colapsar o outro subsistema para diferentes estados. Além disso, Gisin [62] prova que qualquer estado puro emaranhado viola uma desigualdade de Bell. Resumindo, se um dado estado puro possui um dos três recursos — emaranhamento, não localidade de Bell ou direcionamento EPR, então os outros dois também estão presentes.

## 2.8 Modelo de variáveis ocultas

Angelo *et al.* mostram [63] que é possível reproduzir o comportamento de emaranhamento para tempos curtos através de uma teoria clássica de variáveis ocultas locais. Motivados pelo fato que estados puros emaranhados são Bell não locais, Silveira e Angelo (SA) [47, 48] tentaram detectar não localidade de Bell empregando esse modelo clássico para encontrar uma violação da desigualdade CHSH. Reproduziremos nas subseções 2.8.1 e 2.8.2 esses resultados e estenderemos o trabalho de SA na subseção 2.8.3 procurando direcionamento EPR com esse modelo clássico.

### 2.8.1 Variáveis contínuas

A contrapartida clássica para o operador densidade  $\rho(t = 0) = \rho_0$  é uma distribuição de probabilidades clássica. Para tal, SA consideraram a função de Wigner [64]

$$P_W(q_a, q_b, p_a, p_b) = N \int dx dy \langle q_a - x | \langle q_b - y | \rho | q_b + y \rangle | q_b + x \rangle e^{\frac{2ip_a x}{\hbar}} e^{\frac{2ip_b y}{\hbar}}, \quad (2.74)$$

onde  $N$  é um fator de normalização,  $q_a(q_b)$  e  $p_a(p_b)$  são, respectivamente, as posições e momentos no espaço de fase correspondentes ao subsistema de Alice (Bob), para o estado  $\rho$  bipartido. Pode-se mostrar que as probabilidades marginais obtidas da função de Wigner, isto é, integrações da função de Wigner em relação às variáveis do espaço de fase, resultam nas densidades de probabilidades usuais da Mecânica Quântica [65]. Ou seja, considerando, por simplicidade, o caso unidimensional, tem-se que

$$\begin{aligned} \int \frac{dp}{2\pi\hbar} P_W(q, p) &= |\Psi(q)|^2, \\ \int \frac{dq}{2\pi\hbar} P_W(q, p) &= |\Phi(p)|^2, \end{aligned} \quad (2.75)$$

onde  $\Psi(q)$  e  $\Phi(p)$  são, respectivamente, as funções de onda na representação de posição e momento. Além disso, a função de Wigner é normalizada. Tais fatos qualificam a função de Wigner a assumir um papel de quasi-distribuição de probabilidades (não é genuinamente uma distribuição de probabilidades pois pode assumir valores negativos).

No contexto quântico, a evolução de  $\rho_0$  é dada pela equação (2.5). Para o modelo clássico, a prescrição para evolução temporal da distribuição de probabilidades inicial  $P(t = 0) = P_0$  dado o hamiltoniano  $H$  é fornecida pela equação de Liouville  $\frac{\partial P(t)}{\partial t} + \{P(t), H\} = 0$ , onde  $\{P(t), H\}$  são os parênteses de Poisson. A solução da equação de Liouville é dada por [66]

$$P(q_a, p_a, q_b, p_b, t) = P_0(q_a(-t), p_a(-t), q_b(-t), p_b(-t)), \quad (2.76)$$

onde  $q_a(t)$  e  $p_a(t)$  são, respectivamente, a posição e o momento evoluídos no tempo pelas equações de Hamilton  $\dot{q}_a = \frac{\partial H}{\partial p_a}$  e  $\dot{p}_a = -\frac{\partial H}{\partial q_a}$ , e similarmente para  $(q_b, p_b)$ . A trajetória dessas variáveis no espaço de fase aqui representarão o papel de variáveis ocultas.

Agora, para o análogo do traço parcial emprega-se a densidade marginal de probabilidades  $P_a(q_a, p_a, t) = \int dq_b dp_b P(q_a, p_a, q_b, p_b, t)$ . E, para o correspondente à pureza quântica, utiliza-se a quantidade

$$P_{cl}(P_a(q_a, p_a, t)) = \frac{\int dq_a dp_a P_a^2(q_a, p_a, t)}{\int dq_a dp_a P_a^2(q_a, p_a, 0)}. \quad (2.77)$$

Devido à assimetria entre os subespaços [67], introduz-se a medida simétrica de correlação clássica

$$C_{cl}(t) = \frac{1}{2} \left[ \left( 1 - \frac{P_{cl}(P_a(t))}{P_{cl}(P_a(0))} \right) + \left( 1 - \frac{P_{cl}(P_b(t))}{P_{cl}(P_b(0))} \right) \right]. \quad (2.78)$$

Para testar essas definições, SA empregaram o hamiltoniano  $H = \lambda Q_a \otimes Q_b$ , onde  $Q_a(Q_b)$  é o observável de posição para Alice (Bob), e o estado inicial bipartido coerente

$\rho_0 = |z_a\rangle\langle z_a| \otimes |z_b\rangle\langle z_b|$  para calcular o emaranhamento quântico através da entropia de emaranhamento, chegando no resultado

$$E_l = \frac{\tau^2}{1 + \tau^2}, \quad (2.79)$$

onde foi definido o tempo adimensional  $\tau = \lambda t$ . E, a partir da função de Wigner e da medida (2.78), obtém-se a correlação clássica  $C_{cl} = \frac{\tau^2}{1 + \tau^2} = E_l$ . Logo, este modelo clássico-estatístico é capaz de reproduzir perfeitamente o emaranhamento quântico. Sendo um recurso quântico, é surpreendente que o emaranhamento possa ser emulado por uma teoria clássica de variáveis ocultas (trajetórias hamiltonianas), especialmente quando também há não localidade de Bell (pois este é um estado puro).

## 2.8.2 Variáveis discretas

Para tentar detectar não localidade de Bell, SA migraram para sistemas de variáveis discretas para utilizar a desigualdade CHSH. Trabalhou-se com o estado coerente de spin<sup>3</sup>

$$|w\rangle = \frac{1}{(1 + |w|^2)^2} \sum_{n=0}^{2j} w^n \binom{2j}{n}^{\frac{1}{2}} |j, -j + n\rangle, \quad (2.80)$$

onde  $w$  é um parâmetro complexo e  $\{|j, m\rangle\}$  são os autokets simultâneos dos operadores de momento angular  $J^2$  e  $J_z$  com os respectivos autovalores  $j(j + 1)\hbar^2$  e  $m\hbar$ . Em seguida foram calculadas as incertezas  $(\Delta A)^2 = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2$  para os operadores de spin,

$$\begin{aligned} (\Delta J_x)^2 &= \hbar^2 j \left[ \frac{1 + |w|^4 + |w|^2(w^2 + w^{*2})}{2(1 + |w|^2)^2} \right], \\ (\Delta J_y)^2 &= \hbar^2 j \left[ \frac{1 + |w|^4 - |w|^2(w^2 + w^{*2})}{2(1 + |w|^2)^2} \right], \\ (\Delta J_z)^2 &= \hbar^2 j \left[ \frac{2|w|^2}{(1 + |w|^2)^2} \right], \\ (\Delta \mathbf{J})^2 &= \hbar^2 j. \end{aligned} \quad (2.81)$$

Ao tomar o limite  $\hbar \rightarrow 0$  e  $j \rightarrow \frac{1}{\hbar}$  as incertezas acima se anulam. Deste modo, pode-se entender os operadores de spin como "clássicos" no sentido de que podem ser determinados simultaneamente com precisão arbitrária. Tendo esse fato como motivação, define-se neste modelo os análogos clássicos dos operadores como o valor esperado do operador quântico após a tomada do limite descrito acima. Por exemplo, para o observável de spin, tem-se

$$\mathcal{J} = \lim_{\hbar \rightarrow 0} \lim_{j \rightarrow \frac{1}{\hbar}} \langle \mathbf{J} \rangle = \left( \frac{w + w^*}{1 + |w|^2}, \frac{i(w - w^*)}{1 + |w|^2}, \frac{|w|^2 - 1}{1 + |w|^2} \right). \quad (2.82)$$

<sup>3</sup>Estados de spin  $j$  análogos aos estados coerentes do oscilador harmônico tratados na seção 2.2. Estados como estes foram estudados por Radcliffe [68].

Para o correspondente clássico do hamiltoniano, divide-se o valor esperado pelo número quântico de spin para ajustar as escalas quânticas e clássicas

$$\mathcal{H} = \lim_{\hbar \rightarrow 0} \lim_{j \rightarrow \frac{1}{\hbar}} \langle w | \frac{H}{j} | w \rangle. \quad (2.83)$$

Parametrizou-se  $w$  em termos de posição  $q$  e momento  $p$  como  $w = e^{-iq} \sqrt{\frac{1+p}{1-p}}$ , de modo que operador de spin se torna

$$\mathcal{J} = \left( \sqrt{1-p^2} \cos q, \sqrt{1-p^2} \sin q, p \right). \quad (2.84)$$

Em particular para o hamiltoniano  $H = \frac{\lambda}{\hbar} J_z^A \otimes J_z^B$ , tem-se, da equação (2.83) o correspondente clássico  $\mathcal{H} = \lambda p_a p_b$ .

Os autores utilizam como função de distribuição inicial a função de Husimi [69]

$$P_H(q_a, q_b, p_a, p_b) = \frac{\langle z_a | \langle z_b | \rho_0 | z_b \rangle | z_a \rangle}{N}, \quad (2.85)$$

onde  $N$  é um fator de normalização e  $|z\rangle$  é um estado coerente bosônico. Pode-se mostrar que a função de Husimi é uma suavização gaussiana da função de Wigner [70]. Com a escolha do estado coerente de spin 1/2 bipartido separável  $\rho_0 = |w_{a0}\rangle \langle w_{a0}| \otimes |w_{b0}\rangle \langle w_{b0}|$  e, em conjunto com a equação (2.78), obtém-se a correlação

$$C_{Cl}(\tau) = \frac{(p_{a0}^2 - 1)}{8\tau^4} \left[ p_{a0}^2 + \tau^2 + p_{b0}^2 \tau^2 - 2\tau^4 + [-\tau^2 + p_{b0}^2(\tau^2 - 1)] \cos(2\tau) - 2p_{b0}^2 \tau \sin(2\tau) \right], \quad (2.86)$$

e, partir da entropia de emaranhamento, os autores chegam em

$$E_l(\tau) = \frac{8|w_{a0}|^2 |w_{b0}|^2}{(1 + |w_{a0}|^2)^2 (1 + |w_{b0}|^2)^2} \sin^2(2\tau). \quad (2.87)$$

Esses resultados são mostrados na figura 2.4. Assim como o caso discreto, as correlações do modelo clássico para variáveis contínuas têm, ao menos para tempos curtos, comportamento semelhante ao emaranhamento quântico. Além disso, como o estado analisado é puro, as noções de emaranhamento e não localidade de Bell coalescem. Então, será que estamos diante de um modelo clássico-estatístico que parece simular não localidade de Bell e contrariar o teorema de Bell? Para resolver tal impasse, SA aplicaram a desigualdade CHSH (2.32) com  $D_1 = \mathcal{J}_z, D_2 = \hat{n}_2(\theta_u, \phi_u) \cdot \mathcal{J}, D_3 = \hat{n}_3(\theta_n, \phi_n) \cdot \mathcal{J}, D_4 = \hat{n}_4(\theta_v, \phi_v) \cdot \mathcal{J}$ , onde  $\hat{n}_2, \hat{n}_3$  e  $\hat{n}_4$  são versores, e usando a distribuição (2.85) para calcular valores esperados como

$$\langle D_i \otimes D_j \rangle = \int dq_a dq_b dp_a dp_b P_H D_i(q_a, p_a) D_j(q_b, p_b), \quad (2.88)$$

chegaram ao resultado ilustrado na figura 2.5, onde é mostrado o lado esquerdo da desigualdade CHSH, que denotaremos  $S_q$  e  $S_{cl}$ , respectivamente, para o estado quântico e para o modelo clássico, e a violação máxima da desigualdade CHSH (violação de Tsirelson)  $2\sqrt{2}$  [71]. Nota-se que, apesar de simular emaranhamento para tempos curtos, este modelo clássico-estatístico não é capaz de apresentar não localidade de Bell, assim como esperado pelo teorema de Bell.

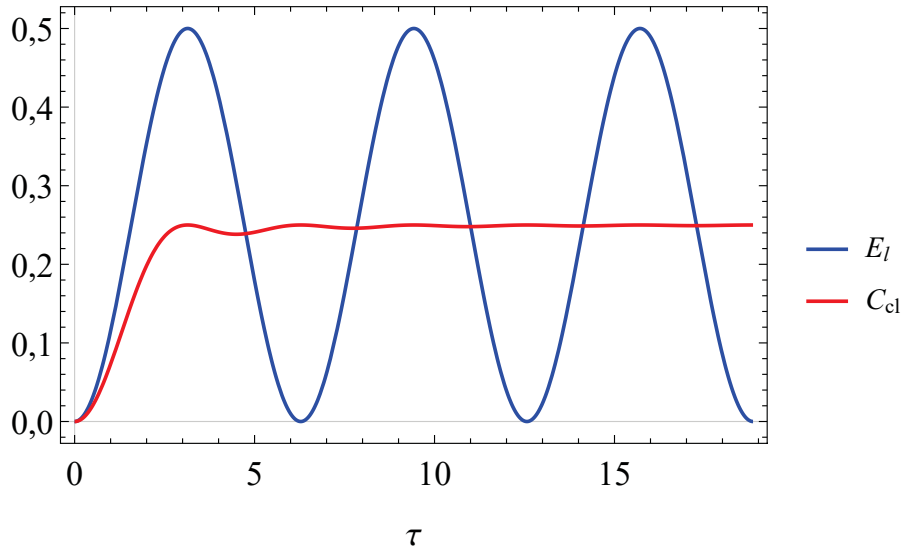


Figura 2.4: Emaranhamento quântico (linha azul) e correlação clássica (linha vermelha) em função do parâmetro adimensional  $\tau = \lambda t$ . Percebe-se que o modelo clássico-estatístico tem, para tempos curtos, comportamento semelhante à teoria quântica. Nessas simulações, SA escolheram  $w_{a0} = w_{b0} = 1$ .

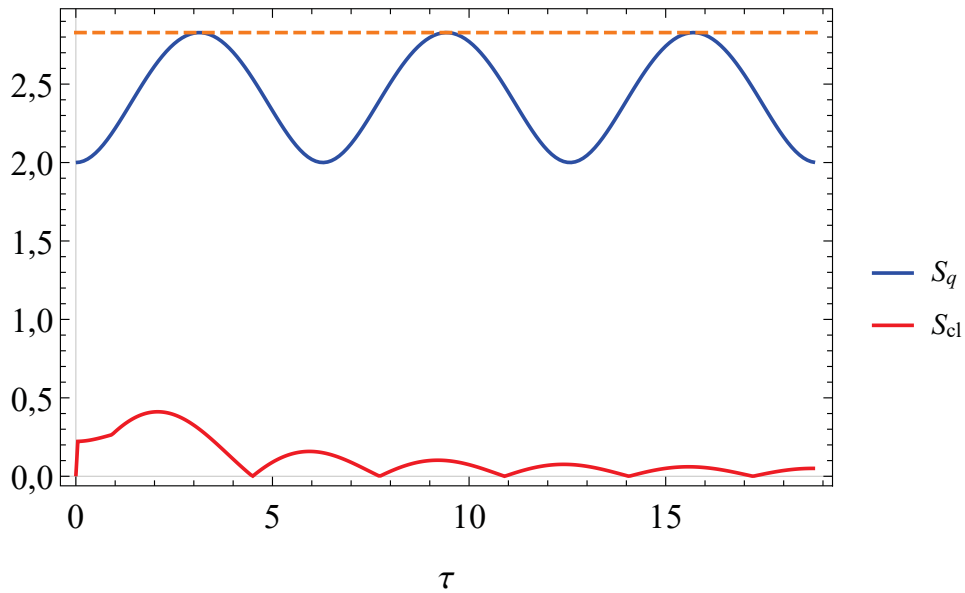


Figura 2.5: Lado esquerdo da desigualdade CHSH para o estado quântico ( $S_q$ , linha azul) e para o modelo clássico estatístico ( $S_{cl}$ , linha vermelha), e violação máxima da CHSH (violação de Tsirelson)  $2\sqrt{2}$  (linha tracejada laranja). Apesar do estado quântico apresentar não localidade de Bell, o modelo clássico-estatístico não é capaz de exibir essa correlação, estando assim de acordo com o teorema de Bell. Nessas simulações, SA escolheram  $w_{a0} = w_{b0} = 1$ .

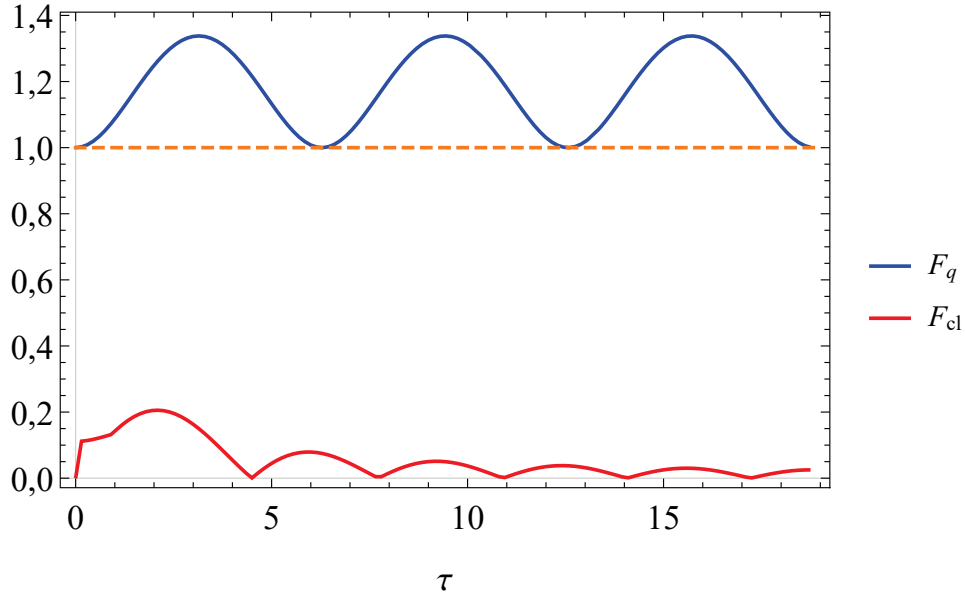


Figura 2.6: Lado esquerdo da desigualdade CJWR para detecção de direcionamento EPR no estado quântico ( $F_q$ , linha azul) e no modelo clássico ( $F_{cl}$ , linha vermelha). O estado apresenta direcionamento EPR quando  $F_{q(cl)}$  é maior do 1 (linha tracejada laranja). O estado quântico apresenta direcionamento EPR, mas o modelo realista, assim como não apresenta não localidade de Bell, também não é capaz de acusar direcionamento EPR. Nessas simulações escolhemos  $w_{a0} = w_{b0} = 1/\sqrt{2}$ .

### 2.8.3 Direcionamento EPR

Apresentaremos agora um resultado original, obtido como uma extensão do trabalho de SA, no qual foi visto que o modelo clássico-estatístico é capaz de reproduzir emaranhamento quântico para tempo curtos porém não é capaz de exibir não localidade de Bell. Entretanto, será que ele consegue violar a desigualdade CJWR (2.52), que detecta direcionamento EPR (recurso intermediário entre emaranhamento e não localidade de Bell)? Para tal investigação utilizaremos a função de Husimi no cálculo dos valores esperado de (2.52), desigualdade na qual escolhemos dois pares de medições para Alice e Bob. O primeiro par de observáveis escolhidos são direções genéricas de spin  $A_1 = \hat{u}_1 \cdot \sigma$  e  $B_1 = \hat{v}_1 \cdot \sigma$ . O segundo par é escolhido de modo que  $\hat{v}_1 \cdot \hat{v}_2 = 0$  e então os ângulos de  $\hat{u}_1$ ,  $\hat{v}_1$  e  $\hat{u}_2$  são variados de modo a majorar a cota superior da desigualdade CJWR (2.52). O resultado é apresentado na figura 2.6, onde vemos que o modelo clássico-estatístico, assim como não mostrava não localidade de Bell, também não apresenta direcionamento EPR.

## 2.9 Irrealismo

Fundamental para a proposta do próximo capítulo, revisaremos agora o conceito de realismo pelo ótica do trabalho de Bilobran e Angelo [40] (BA). Como discutido na seção 2.4, o critério EPR baseia-se na existência de uma realidade objetiva independente do observador. Estendendo essa definição, BA consideram o protocolo ilustrado na figura 2.7.

1. Prepara-se um estado  $\rho$ .



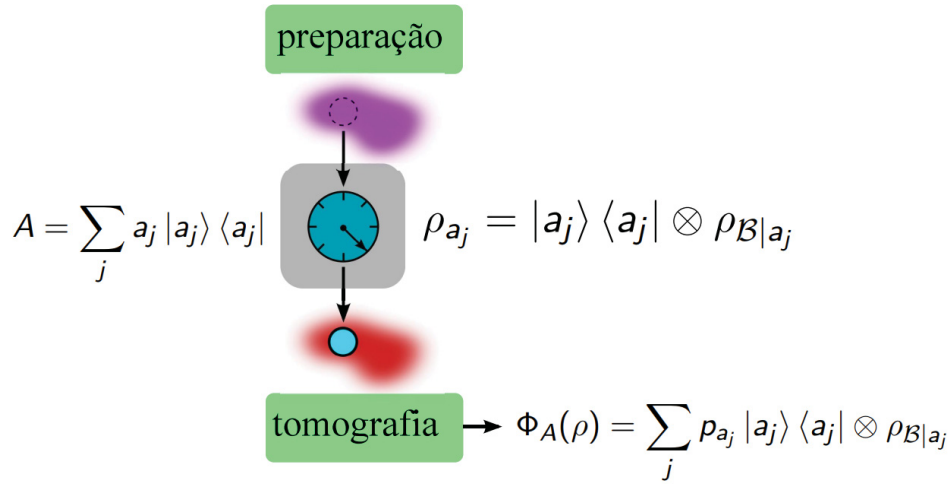


Figura 2.7: Protocolo de Bilobran e Angelo (figura adaptada do trabalho original [40]).

2. Um agente realiza a medição de um observável de espectro discreto  $A = \sum_j a_j \Pi_{a_j}^A$  atuando no subespaço  $\mathcal{A}$ , com os projetores  $\Pi_{a_j}^A = |a_j\rangle \langle a_j|$ . A notação aqui utilizada é tal que obtém-se o autovalor  $a_j$  e o estado é colapsado para  $\rho_{a_j} = \Pi_{a_j}^A \rho \Pi_{a_j}^A$ , sendo  $\rho_{\mathcal{B}|a_j} = \text{Tr}_{\mathcal{A}} \left( \Pi_{a_j}^A \rho \Pi_{a_j}^A \right) / p_{a_j}$  o estado condicionado ao resultado  $a_j$ , com probabilidade de ocorrência  $p_{a_j} = \text{Tr} \left( \Pi_{a_j}^A \rho \Pi_{a_j}^A \right)$ .
3. O estado é enviado para um observador (Charlie) que desconhece o resultado  $a_j$ , e então realiza tomografia.

Agora, a melhor descrição possível do estado recebido por Charlie é

$$\begin{aligned}
 \Phi_A(\rho) &= \sum_j \Pi_{a_j}^A \rho \Pi_{a_j}^A \\
 &= \sum_j p_{a_j} \Pi_{a_j}^A \otimes \rho_{\mathcal{B}|a_j}.
 \end{aligned}
 \tag{2.89}$$

Após cada medição, o agente garante a realidade (pelo critério EPR) do observável medido pois agora o estado está em um autoestado conhecido (ainda que apenas pelo agente) de  $A$  e, portanto, a falta de informação de Charlie a respeito do observável recebido deve-se exclusivamente à sua ignorância subjetiva.

A partir das considerações acima, Bilobran e Angelo definem o critério de realidade:

**Critério de Realidade:** Um observável  $A$  atuando em um subespaço  $\mathcal{A}$  é real para um estado  $\rho$  se

$$\Phi_A(\rho) = \rho.
 \tag{2.90}$$

Em outras palavras, um observável é real para uma dada preparação quando uma medição não revelada não altera o estado original. É interessante perceber que uma nova medição não revelada não altera a realidade pré-existente, pois

$$\begin{aligned}
 \Phi_A(\Phi_A(\rho)) &= \sum_j \Pi_{a_j}^A \Phi_A(\rho) \Pi_{a_j}^A \\
 &= \sum_{j,k} \Pi_{a_j}^A \Pi_{a_k}^A \rho \Pi_{a_j}^A \Pi_{a_k}^A \\
 &= \sum_{j,k} \delta_{a_j, a_k} |a_j\rangle \langle a_k| \rho |a_j\rangle \langle a_k| \\
 &= \Phi_A(\rho).
 \end{aligned} \tag{2.91}$$

O critério de Bilobran e Angelo concorda com o critério EPR quando o estado é preparado em um autoestado do observável  $\rho = |a_k\rangle \langle a_k|$ , haja vista que podemos prever com probabilidade 1 que o resultado de medidas do observável  $A$  sempre retornará o autovalor  $a_k$  sem alterar o sistema (critério EPR). Além disso, o critério de Bilobran e Angelo também prevê um elemento de realidade quando é uma mistura estatística de autoestados do observável, pois

$$\begin{aligned}
 \Phi_A \left( \sum_k p_{a_k} |a_k\rangle \langle a_k| \right) &= \sum_{j,k} p_{a_k} |a_j\rangle \langle a_j| \delta_{a_j, a_k} \\
 &= \sum_k p_{a_k} |a_k\rangle \langle a_k| \\
 &= \rho.
 \end{aligned} \tag{2.92}$$

Com essas considerações, Bilobran e Angelo definem como medida de irrealidade de um observável a distância entrópica entre a preparação  $\rho$  e um estado de realidade para  $A$ :

$$\mathfrak{I}(A|\rho) = S_N(\Phi_A(\rho)) - S_N(\rho). \tag{2.93}$$

Fazendo uma conexão com o argumento de completeza da Mecânica Quântica discutido por EPR, Bilobran e Angelo mostram que dois observáveis incompatíveis atuando em  $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$  são simultaneamente reais (de acordo com a definição 2.90) se, e somente se,  $\rho = \frac{\mathbb{1}}{d_{\mathcal{A}}} \otimes \text{Tr}_{\mathcal{A}} \rho$ , onde  $d_{\mathcal{A}}$  é a dimensão de  $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$ . Este é o caso onde todos os observáveis são reais. Portanto, dado um estado  $\rho$  arbitrário, observáveis incompatíveis não terão realidade simultânea em geral, em contraste com EPR.

### 2.9.1 Irrealidade de Observáveis Incompatíveis

Seguindo o trabalho de BA, Freire e Angelo [45] derivam uma relação de incerteza baseada em irrealismo. Considera-se o estado  $\Phi_A(\rho)$  de realidade para o observável  $A$  e outro observável  $A'$  incompatível com  $A$ . Neste cenário, os autores chegam na relação

$$\mathfrak{I}(A|\rho) + \mathfrak{I}(A'|\rho) \geq \ln d_{\mathcal{A}} - S_N(\rho) + S_N(\rho_{\mathcal{B}}). \tag{2.94}$$

Ao considerar um sistema puro, tem-se que  $S_N(\rho) = 0$ , de modo que o lado direito da equação acima se reduz à  $\ln d_{\mathcal{A}} + S_N(\rho_{\mathcal{B}})$ , onde  $S_N(\rho_{\mathcal{B}})$  é o emaranhamento do subespaço  $\mathcal{A}$  com o restante do sistema. Dessa maneira, as irrealidades de dois observáveis incompatíveis não podem se anular simultaneamente para estados puros.

## Capítulo 3

# Irrealismo e Direcionamento EPR

### 3.1 Direcionamento EPR

Inspirados pelo mapa (2.89) e pelo critério de irrealidade (2.93), introduziremos um critério para detecção de direcionamento EPR que será baseado em valores esperados, tornando o seu cálculo mais simples do que, por exemplo, o critério entrópico (2.72). O conceito de direcionamento EPR será implementado aqui, pelo menos em certo teor, pela comparação de  $\langle A \otimes B \rangle_\rho = \text{Tr}(A \otimes B \rho)$  com  $\langle A \otimes B \rangle_{\tilde{\rho}} = \text{Tr}(A \otimes B \tilde{\rho})$ , onde  $\tilde{\rho}$  denotará um estado para o qual existirá, por construção, uma determinada noção de elemento de realidade de essência fundamentalmente clássica. Tal proposta é baseada na hipótese (2.51), na qual a probabilidade conjunta para um estado não direcionável bipartido é tal que o subsistema de Bob é compatível com um estado descrito pela Mecânica Quântica enquanto o subsistema de Alice possui uma distribuição de probabilidades genérica, a qual consideraremos aqui consistente com um estado descrito pela Mecânica Clássica.

Estamos imaginando o seguinte cenário: se fosse possível determinar (medir) simultaneamente a posição e o momento de uma partícula, teríamos informação sobre sua localização no espaço de fase  $(q, p)$ . Como posição e momento são variáveis quânticas incompatíveis, o máximo que podemos conhecer é uma região permitida por um estado de mínima incerteza (aqui utilizaremos o estado coerente). Com estas ponderações, consideramos o protocolo ilustrado na figura 3.1. Seja um estado  $\rho \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathcal{A}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{B}})$  e a “projeção”

$$\begin{aligned} \rho \mapsto \rho_z &:= \frac{(\Pi_z \otimes \mathbb{I})\rho(\Pi_z \otimes \mathbb{I})}{\text{Tr}[(\Pi_z \otimes \mathbb{I})\rho(\Pi_z \otimes \mathbb{I})]} \\ &= \Pi_z \otimes \frac{\langle z | \rho | z \rangle}{p_z} \\ &= \Pi_z \otimes \rho_{\mathcal{B}|z}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde  $p_z = \langle z | \rho_{\mathcal{A}} | z \rangle$  é a função de Husimi — vide (2.85) — não-normalizada do estado reduzido  $\rho_{\mathcal{A}} = \text{Tr}_{\mathcal{B}}(\rho)$ ,  $\rho_{\mathcal{B}|z} = \langle z | \rho | z \rangle / p_z$  é o estado do subespaço  $\mathcal{B}$  condicionado à saída  $z$ ,  $\Pi_z = |z\rangle \langle z|$

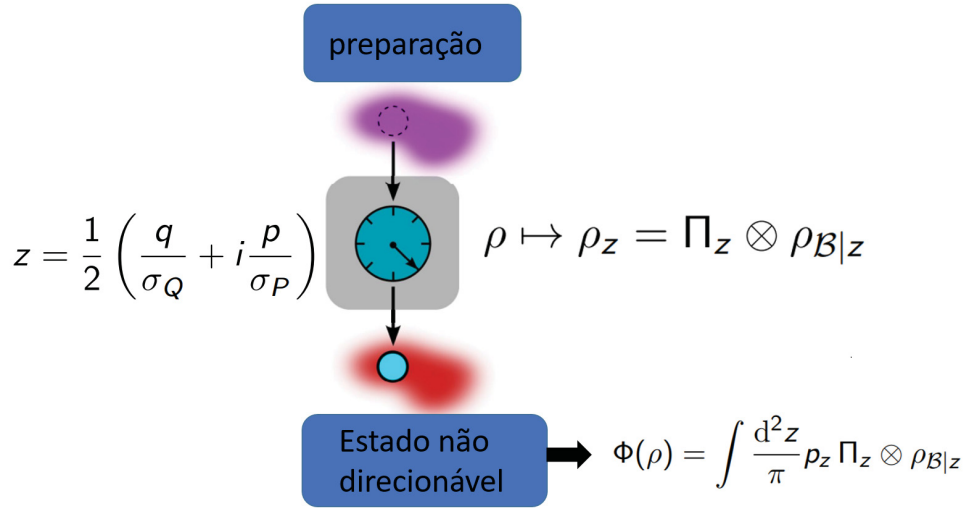


Figura 3.1: Protocolo de medição não revelada para posição e momento (figura adaptada de [40]). Um estado  $\rho$  é preparado e então medições não reveladas de posição e momento são realizadas através do estado coerente  $z$ , resultando no estado não direcionável  $\Phi(\rho)$ .

é um “pseudo projetor”<sup>1</sup> e  $|z\rangle$  é um estado coerente bosônico em  $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$  com parametrização  $z = \frac{1}{2} \left( \frac{q}{\sigma_Q} + i \frac{p}{\sigma_P} \right) \in \mathbb{C}$ . No regime<sup>2</sup>

$$\sigma_Q^2 = \sigma_P^2 \rightarrow 0 \quad (3.2)$$

(condição que será sempre tacitamente assumida daqui por diante), o mapeamento (3.1) equivale a uma medição projetiva exótica em que o estado  $(q, p)$  estaria bem definido, ou seja, trata-se de um contexto com elemento de realidade clássica. Esta é uma forma de introduzir a hipótese de variáveis clássicas realistas no subespaço  $\mathcal{A}$  apenas. Se o resultado  $(q, p)$  obtido por Alice não é revelado, após tal “pseudo medição” teremos

$$\begin{aligned}
 \tilde{\rho} := \Phi(\rho) &:= \int \frac{d^2 z}{\pi} (\Pi_z \otimes \mathbb{1}) \rho (\Pi_z \otimes \mathbb{1}) \\
 &= \int \frac{d^2 z}{\pi} p_z \Pi_z \otimes \rho_{\mathcal{B}|z} \\
 &= \int \frac{d^2 z}{\pi} |z\rangle \langle z| \otimes \langle z| \rho |z\rangle,
 \end{aligned} \quad (3.3)$$

com  $\text{Tr}(\tilde{\rho}) = 1$ . A notação empregada é tal que o mapa  $\Phi$ , alinhado ao limite implícito (3.2), produz um estado clássico na parte  $\mathcal{A}$ , de modo que  $\Phi(\Phi(\rho)) = \Phi(\rho)$ , significando que o estado

<sup>1</sup>Embora  $\Pi_z$  não seja de fato um projetor, já que a base de estados coerentes não é ortogonal, ao longo deste trabalho teremos  $\Pi_z \Pi_{z'} = \langle z|z'\rangle |z\rangle \langle z'| \rightarrow \delta(q - q') \delta(p - p') \Pi_z$  no limite  $\sigma_Q^2 = \sigma_P^2 \rightarrow 0$ , o que acaba por implementar efetivamente a noção de projeção.

<sup>2</sup>A rigor, os desvios padrões de posição e momento estão restritos pela condição  $\sigma_Q \sigma_P = \hbar/2$ , de modo que não seria possível fazê-los ambos indo a zero simultaneamente. Porém, veremos adiante que esse limite formal resulta em um estado clássico no subespaço de Alice. Nesse sentido, temos uma teoria realista na qual posição e momento estão simultaneamente bem definidos, ou seja, de fato temos que as incertezas  $\sigma_Q$  e  $\sigma_P$  se anulam. Outra maneira mais rigorosa de entender esse limite é a seguinte: no tratamento usual de estados coerentes a parametrização aqui utilizada surge ao impor  $q = \langle Q \rangle$  e  $p = \langle P \rangle$  (seção 2.2). Porém, estados coerentes têm incerteza mínima para posição e momento (mais clássico possível) independentemente da parametrização escolhida. Portanto, pode-se considerar  $\sigma_Q$  e  $\sigma_P$  como parâmetros livres.

de realidade não é alterado por nova medição projetiva não revelada. É instrutivo observar como este resultado emerge:

$$\begin{aligned}
\Phi(\Phi(\rho)) &= \int \frac{d^2 z'}{\pi} \frac{d^2 z}{\pi} (\Pi_{z'} \otimes \mathbb{1})(\Pi_z \otimes \mathbb{1}) \rho (\Pi_z \otimes \mathbb{1})(\Pi_{z'} \otimes \mathbb{1}) \\
&= \int \frac{d^2 z}{\pi} \frac{d^2 z'}{\pi} |\langle z' | z \rangle|^2 |z'\rangle \langle z| \rho |z\rangle \langle z'| \\
&= \int \frac{dq' dp'}{\pi \sigma_Q \sigma_P} \exp \left[ -\frac{(q' - q)^2}{\sigma_Q^2} \right] \exp \left[ -\frac{(p' - p)^2}{\sigma_P^2} \right] \int \frac{d^2 z}{\pi} |z'\rangle \langle z| \rho |z\rangle \langle z'|.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Lembrando a representação da delta de Dirac como o limite de uma função gaussiana  $\delta(x) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}}$ , reescrevemos a equação acima como

$$\begin{aligned}
\Phi(\Phi(\rho)) &= \int \int \frac{d^2 z}{\pi} \left[ dq' dp' \delta(q' - q) \delta(p' - p) \right] |z'\rangle \langle z| \rho |z\rangle \langle z'| \\
&= \int \frac{d^2 z}{\pi} \Pi_z \rho \Pi_z = \Phi(\rho).
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Utilizaremos a partir de agora os observáveis

$$A_\alpha = \hat{a} e^{i\alpha} + \hat{a}^\dagger e^{-i\alpha}, \tag{3.6}$$

$$B_\beta = \hat{b} e^{i\beta} + \hat{b}^\dagger e^{-i\beta}, \tag{3.7}$$

onde  $\hat{a}(\hat{b})$  e  $\hat{a}^\dagger(\hat{b}^\dagger)$  são, respectivamente, os operadores de aniquilação e criação para o estado em posse de Alice (Bob) e  $(\alpha, \beta) \in [0, 2\pi]$ . Com as relações entre  $a$  e  $a^\dagger$  e os observáveis de posição  $Q$  e de momento  $P$

$$\begin{aligned}
a &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left( Q + \frac{iP}{m\omega} \right), \\
a^\dagger &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left( Q - \frac{iP}{m\omega} \right),
\end{aligned} \tag{3.8}$$

para um oscilador harmônico de massa  $m$  e frequência  $\omega$ , pode-se reescrever (3.6) e (3.7) como

$$A_\alpha = Q'_\mathcal{A} \cos \alpha + P'_\mathcal{A} \sin \alpha, \tag{3.9}$$

$$B_\beta = Q'_\mathcal{B} \cos \beta + P'_\mathcal{B} \sin \beta, \tag{3.10}$$

onde definimos  $Q' = Q \sqrt{2m\omega/\hbar}$  e  $P' = -P \sqrt{2/m\omega\hbar}$ .

### 3.1.1 Estado clássico para Alice

Veremos agora que o mapa  $\Phi(\rho)$  e o limite  $\sigma_Q^2 = \sigma_P^2 \rightarrow 0$  implicam em desprezar a variância  $\sigma_A^2 = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2$  calculada para o estado  $\rho = |z_a\rangle \langle z_a|$ , ou seja, obtém-se um estado

clássico no subespaço de Alice. Isto ocorre ao considerarmos valores esperados para (3.6), de modo que, definindo  $A(z_1^*, z_2) = \frac{\langle z_1 | A | z_2 \rangle}{\langle z_1 | z_2 \rangle} = \sqrt{\frac{\hbar}{2}} (e^{i\alpha} z_2 + e^{-i\alpha} z_1^*)$ , temos

$$\begin{aligned} \langle A^2 \rangle &= \langle z_a | A^2 | z_a \rangle \\ &= \int \frac{d^2 z}{\pi} \langle z_a | A | z \rangle \langle z | A | z_a \rangle \\ &= \int \frac{d^2 z}{\pi} A(z_a^*, z) A(z^*, z_a) |\langle z_a | z \rangle|^2 \\ &= \langle z_a | A | z_a \rangle^2 = \langle A \rangle^2, \end{aligned} \quad (3.11)$$

onde o limite clássico  $|\langle z_a | z \rangle|^2 / \pi \sigma_Q \sigma_P \rightarrow \delta(q - q_a) \delta(p - p_a)$  foi tomado na terceira linha. Além disso, provaremos por indução que  $\langle A^n \rangle = \langle A \rangle^n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  maior ou igual à 2. Suponha que  $\langle A^{n-1} \rangle = \langle A \rangle^{n-1}$ . Então,

$$\begin{aligned} \langle A^n \rangle &= \langle z_a | A^{n-1} A | z_a \rangle \\ &= \int \frac{d^2 z}{\pi} \langle z_a | A^{n-1} | z \rangle \langle z | A | z_a \rangle \\ &= \int \frac{d^2 z}{\pi} \frac{\langle z_a | A^{n-1} | z \rangle}{\langle z_a | z \rangle} A(z^*, z_a) |\langle z_a | z \rangle|^2 \\ &= \langle z_a | A | z_a \rangle^{n-1} \langle z_a | A | z_a \rangle \\ &= \langle A \rangle^n. \end{aligned} \quad (3.12)$$

A partir dessas considerações, iremos calcular valores esperados do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \langle A^n \otimes B^m \rangle_{\Phi(\rho)} &= \text{Tr} \left( A^n \otimes B^m \int \frac{d^2 z}{\pi} |z\rangle \langle z| \otimes \langle z| \rho |z\rangle \right) \\ &= \int \frac{d^2 z}{\pi} \langle z | A^n | z \rangle \text{Tr}_{\mathcal{B}} [B^m \langle z | \rho | z \rangle] \\ &= \int \frac{d^2 z}{\pi} \langle z | A | z \rangle^n \text{Tr}_{\mathcal{B}} [B^m \langle z | \rho | z \rangle] \\ &= \int \frac{d^2 z}{\pi} p_z \left( \langle A \rangle_{|z\rangle\langle z|} \right)^n \langle B^m \rangle_{\rho_{\mathcal{B}|z}}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

onde  $\langle A \rangle_{|z\rangle\langle z|} = \text{Tr}_{\mathcal{A}} (A |z\rangle \langle z|)$  e  $\langle B^m \rangle_{\rho_{\mathcal{B}|z}} = \text{Tr}_{\mathcal{B}} (B^m \rho_{\mathcal{B}|z})$ . Agora, uma vez que o limite clássico já foi aplicado na segunda linha de (3.13), a integral é calculada normalmente. Nota-se que apenas uma das partes foi "classicalizada".

### 3.1.2 Critério para identificação de direcionamento EPR

Com o objetivo de medir o quanto as médias calculadas via Mecânica Quântica padrão podem ser aproximadas por médias calculadas com estados de realismo em uma das partes, propomos o critério baseado em realismo para detecção de direcionamento EPR

$$\Delta(A, B, \rho) := \left| \frac{\langle A^n \otimes B^m \rangle_{\Phi(\rho)}}{\langle A^n \rangle_{\Phi(\rho)}} - \frac{\langle A^n \otimes B^m \rangle_{\rho}}{\langle A^n \rangle_{\rho}} \right|, \quad (3.14)$$

com  $m$  e  $n$  sendo inteiros maiores ou iguais à 2. Deste modo,  $\Delta(A, B, \rho)$  faz inferências de como a Mecânica Quântica viola a noção de realismo local no contexto dos observáveis  $A, B$  e do estado  $\rho$ . Nesse critério,  $\langle A^n \otimes B^m \rangle_{\Phi(\rho)}$  é calculado como em (3.13) e

$$\langle A^n \rangle_{\Phi(\rho)} = \int \frac{d^2 z}{\pi} \langle z | A | z \rangle^n \text{Tr}_{\mathcal{B}} [\langle z | \rho | z \rangle]. \quad (3.15)$$

Também podemos perceber que o mapa (3.3) não produz nenhum efeito no valor esperado de um observável do subespaço  $\mathcal{B}$ , pois

$$\begin{aligned} \langle B \rangle_{\Phi(\rho)} &= \int \frac{d^2 z}{\pi} \text{Tr}_{\mathcal{B}} [B \langle z | \rho | z \rangle] \\ &= \text{Tr}_{\mathcal{A}} \text{Tr}_{\mathcal{B}} [B \rho] \\ &= \langle B \rangle_{\rho}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Como visto na fundamentação teórica, um estado puro separável é também um estado Bell local e não direcionável. Portanto, é indispensável que para tais estados,  $\Delta(A, B, \rho)$  se anule. Podemos ver que essa propriedade é satisfeita pois para  $\rho = \rho_{\mathcal{A}} \otimes \rho_{\mathcal{B}}$  temos

$$\begin{aligned} \langle A \otimes B \rangle_{\Phi(\rho)} &= \int \frac{d^2 z}{\pi} \langle z | A | z \rangle \text{Tr}_{\mathcal{B}} [B \langle z | \rho_{\mathcal{A}} \otimes \rho_{\mathcal{B}} | z \rangle] \\ &= \int \frac{d^2 z}{\pi} \langle z | A | z \rangle \langle z | \rho_{\mathcal{A}} | z \rangle \text{Tr}_{\mathcal{B}} [B \rho_{\mathcal{B}}] \\ &= \langle A \rangle_{\Phi(\rho)} \langle B \rangle_{\Phi(\rho)}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

assim como

$$\begin{aligned} \langle A \otimes B \rangle_{\rho} &= \text{Tr} [(A \otimes B) (\rho_{\mathcal{A}} \otimes \rho_{\mathcal{B}})] \\ &= \text{Tr}_{\mathcal{A}} [A \rho_{\mathcal{A}}] \text{Tr}_{\mathcal{B}} [B \rho_{\mathcal{B}}] \\ &= \langle A \rangle_{\rho} \langle B \rangle_{\rho}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Portanto, para um estado puro separável, temos

$$\Delta(A^n, B^m, \rho) = \left| \frac{\langle A^n \otimes B^m \rangle_{\Phi(\rho)}}{\langle A^n \rangle_{\Phi(\rho)}} - \frac{\langle A^n \otimes B^m \rangle_{\rho}}{\langle A^n \rangle_{\rho}} \right| = |\langle B^m \rangle_{\Phi(\rho)} - \langle B^m \rangle_{\rho}| = 0. \quad (3.19)$$

Utilizando o estado “clássico-quântico”  $\tilde{\rho}$  definido pela equação (3.3) verifica-se que

$$\begin{aligned} p(a, b | A, B) &= \text{Tr} \left( \Pi_a^A \otimes \Pi_b^B \tilde{\rho} \right) \\ &= \int \frac{d^2 z}{\pi} p_z \text{Tr}_{\mathcal{A}} \left( \Pi_a^A | z \rangle \langle z | \right) \text{Tr}_{\mathcal{B}} (B_b \rho_{\mathcal{B}} | z) \\ &= \int \frac{d^2 z}{\pi} p_z p_{cl}(a | A, z) p_q(b | B, z), \end{aligned} \quad (3.20)$$

onde, como vimos em (3.11) que o limite implícito aplicado no estado  $\rho = |z\rangle \langle z|$  produz um estado clássico, identificamos a probabilidade  $\text{Tr}_{\mathcal{A}} (\Pi_a^A |z\rangle \langle z|)$  como uma probabilidade clássica  $p_{cl}(a | A, z)$ . Dessa forma recobramos a hipótese usual de não-direcionalidade (2.51).

Além disso, percebe-se que o limite (3.2), o qual implica em um estado de realismo (irrealidade nula) para posição e momento (observáveis incompatíveis) simultaneamente, viola a relação de incerteza (2.94), de modo que realmente o estado obtido é de fato clássico e não obedece às leis da Mecânica Quântica.

### 3.1.3 Quantificador de Direcionamento EPR

Em geral, o critério baseado em realismo (3.14) é função não só do estado  $\rho$ , mas do contexto  $(A, B, \rho)$ , sendo que a dependência nos observáveis se dá através dos parâmetros  $(\alpha, \beta)$  de (3.6) e (3.7). Dessa maneira,  $\Delta(A^n, B^m, \rho)$  é uma testemunha de direcionamento EPR, isto é, identifica se um estado é direcionável dado os observáveis  $A$  e  $B$ . Logo, é possível que um certo estado não seja direcionável para um certo par de observáveis porém o seja para outro. Portanto, para deixar o critério de direcionamento EPR dependente apenas do estado considerado, propomos a quantidade

$$\mathfrak{Q}(\rho) := \max_{\alpha, \beta} \Delta(A_\alpha^n, B_\beta^m, \rho), \quad (3.21)$$

a qual denominaremos quantificador de direcionamento EPR. Ela corresponde à distância máxima entre os valores esperados usuais da Mecânica Quântica e os valores esperados obtidos a partir de uma teoria realista para um dos subespaços de um estado bipartido. Se o quantificador  $\mathfrak{Q}(\rho)$  for não nulo, então o estado considerado não é compatível com uma teoria realista em um dos subespaços e apresenta direcionamento EPR baseado em realismo.

## 3.2 Estado comprimido de vácuo de dois modos

A partir desta seção aplicaremos o critério de direcionamento EPR baseado em realismo para vários estados que já foram submetidos aos critério de Reid e/ou entrópico em trabalhos da literatura.

Começaremos com o estado comprimido de dois modos, obtido ao aplicar o operador de compressão  $S(r) = \exp[r(a_1^\dagger a_2^\dagger - a_1 a_2)]$ , onde  $r \geq 0$  é o parâmetro de compressão, no estado de vácuo

$$\begin{aligned} |\xi\rangle &= S(r) |0\rangle \otimes |0\rangle \\ &= \sqrt{1 - \lambda^2} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n |n, n\rangle, \end{aligned} \quad (3.22)$$

onde  $\lambda = \tanh(r)$  e  $\{|n\rangle\}$  são os estados de Fock. O operador densidade correspondente a este estado é facilmente obtido:

$$\rho = (1 - \lambda^2) \sum_{n, n'=0}^{\infty} \lambda^{n+n'} |n\rangle \langle n'| \otimes |n\rangle \langle n'|. \quad (3.23)$$

É esclarecedor estudarmos as funções de onda na representação de posição [72]

$$\Psi(q_{\mathcal{A}}, q_{\mathcal{B}}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{-(q_{\mathcal{A}} + q_{\mathcal{B}})^2}{4R^2}} e^{\frac{-R^2(q_{\mathcal{A}} - q_{\mathcal{B}})^2}{4}}, \quad (3.24)$$



e na representação de momento

$$\Psi(p_{\mathcal{A}}, p_{\mathcal{B}}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{-(p_{\mathcal{A}} - p_{\mathcal{B}})^2}{4R^2}} e^{\frac{-R^2(p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}})^2}{4}}, \quad (3.25)$$

onde  $R = e^r$  e considera-se as variáveis adimensionais de quadraturas  $q_{\mathcal{A}}(q_{\mathcal{B}})$  de posição e  $p_{\mathcal{A}}(p_{\mathcal{B}})$  de momento de Alice (Bob). Plotando as densidades de probabilidades  $|\Psi(q_{\mathcal{A}}, q_{\mathcal{B}})|^2$  e  $|\Psi(p_{\mathcal{A}}, p_{\mathcal{B}})|^2$  obtemos a figura 3.2.

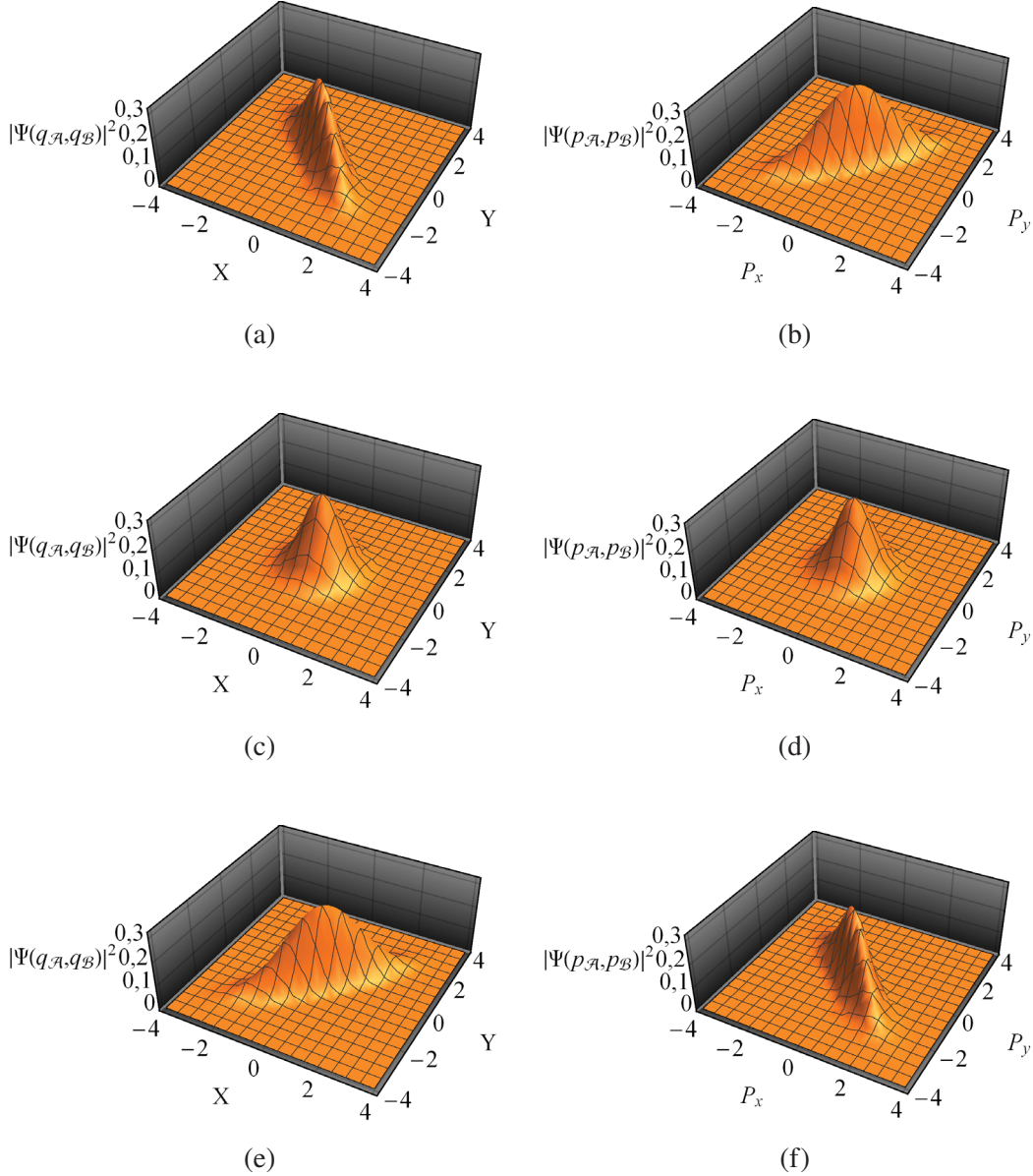


Figura 3.2: Densidades de probabilidade para o estado comprimido de vácuo de dois modos em termos das posições para diferentes valores de  $R$ : 3.2(a) com  $R = 0,5$ ; 3.2(c) com  $R = 1$ ; 3.2(e) com  $R = 2$ . Similarmente para a densidades de probabilidades em termos dos momentos: 3.2(b) com  $R = 0,5$ ; 3.2(d) com  $R = 1$ ; 3.2(f) com  $R = 2$ . O operador de compressão alonga as densidades de probabilidade para as posições em direção oposta à densidade de probabilidade para os momentos. Para  $R = 1$ ,  $S(r)$  não tem nenhuma ação e recobramos a distribuição simétrica.

Vemos que o efeito do operador de compressão  $S(r)$  é alongar as densidades de probabilidades na linha  $q_{\mathcal{A}} = -q_{\mathcal{B}}$  da representação de posição e  $p_{\mathcal{A}} = p_{\mathcal{B}}$  na representação de momento quando  $R < 1$ . Para  $R = 1$  ( $r = 0$ ), recobramos o estado de vácuo (distribuição simétrica e gaussiana), e para  $R > 1$ , a densidade de probabilidade tem maior distribuição na linha  $q_{\mathcal{A}} = q_{\mathcal{B}}$  da representação de posição e  $p_{\mathcal{A}} = -p_{\mathcal{B}}$  na representação de momento. Como discutido por Lvovsky [72], no limite  $R \rightarrow \infty$  as funções de onda (3.24) e (3.25) se tornam  $\Psi(q_{\mathcal{A}}, q_{\mathcal{B}}) \propto \delta(q_{\mathcal{A}} - q_{\mathcal{B}})$  e  $\Psi(p_{\mathcal{A}}, p_{\mathcal{B}}) \propto \delta(p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}})$ . Portanto, Alice pode, ao medir posição  $q_{\mathcal{A}}$ , obter a posição  $q_{\mathcal{B}} = q_{\mathcal{A}}$  da partícula de Bob, e, ao medir momento  $p_{\mathcal{A}}$ , obter o momento  $p_{\mathcal{B}} = -p_{\mathcal{A}}$  da partícula em posse de Bob, colapsando assim a função de onda de Bob para autoestados de dois observáveis incompatíveis, argumento este que levou EPR a concluir a incompleteza da Mecânica Quântica. Estados como esse foram usados para demonstrar experimentalmente [73] o paradoxo EPR através do critério de Reid.

### 3.2.1 Emaranhamento

Primeiramente, examinaremos a não separabilidade deste estado através do cálculo da entropia de emaranhamento. Tomando o traço parcial do estado (3.22) e substituindo na equação (2.24), obtemos

$$E_I(\rho) = 1 - \operatorname{sech} 2r, \quad (3.26)$$

e, como podemos perceber da figura 3.3, com exceção de  $r = 0$ , o estado sempre apresenta emaranhamento. Adicionalmente, percebemos que o emaranhamento cresce monotonicamente com  $r$  (de modo que o próprio  $r$  é uma medida do emaranhamento do estado) e tende assintoticamente para  $E_I = 1$ .

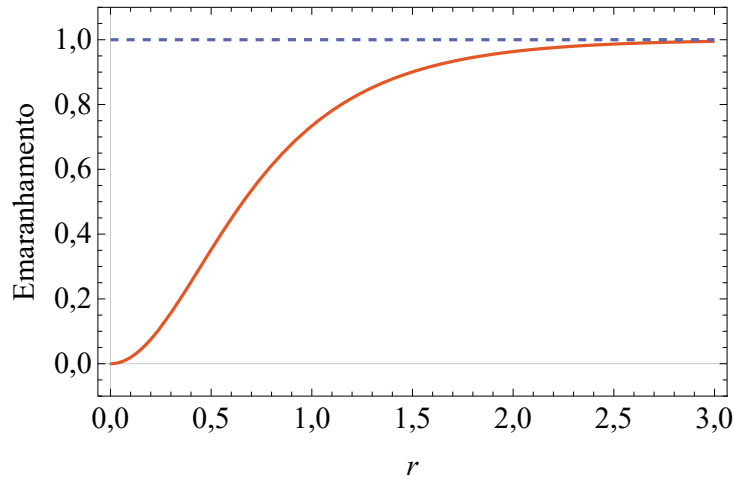


Figura 3.3: Entropia de emaranhamento para o estado comprimido de vácuo em termos do parâmetro de compressão  $r$  (linha sólida laranja). O emaranhamento tende assintoticamente para o valor máximo  $E_I = 1$  (linha tracejada).

### 3.2.2 Direcionamento EPR

No estudo do direcionamento EPR através do critério de Reid e do critério entrópico aplicado para o estado comprimido de vácuo de dois modos, seguiremos a abordagem de Chowdhury *et al.* [36], na qual é fornecida a função de Wigner para este estado:

$$P_W(q_{\mathcal{A}}, q_{\mathcal{B}}, p_{\mathcal{A}}, p_{\mathcal{B}}) = \frac{1}{\pi^2} \exp \left[ -2(p_{\mathcal{A}}p_{\mathcal{B}} - q_{\mathcal{A}}q_{\mathcal{B}}) \sinh 2r - (q_{\mathcal{A}}^2 + q_{\mathcal{B}}^2 + p_{\mathcal{A}}^2 + p_{\mathcal{B}}^2) \cosh 2r \right]. \quad (3.27)$$

#### Critério de Reid

Dado o estado  $\rho$ , valores esperados como  $\langle \tilde{A}_\alpha \tilde{B}_\beta \rangle$  e  $\langle A_\alpha B_\beta \rangle_\rho$  podem ser diretamente calculados a partir dos observáveis correspondentes. A prescrição para o cálculo de  $\langle A_\alpha B_\beta \rangle_\rho$ , por exemplo, é

$$\begin{aligned} \langle A_\alpha \otimes B_\beta \rangle &= \text{Tr}[A_\alpha \otimes B_\beta \rho] = (1 - \lambda^2) \sum_{n, n'=0}^{\infty} \lambda^{n+n'} \langle n' | A_\alpha | n \rangle \langle n' | B_\beta | n \rangle \\ &= (1 - \lambda^2) \sum_{n, n'=0}^{\infty} \lambda^{n+n'} \langle n' | \left( \hat{a} e^{i\alpha} + \hat{a}^\dagger e^{-i\alpha} \right) | n \rangle \langle n' | \left( \hat{b} e^{i\beta} + \hat{b}^\dagger e^{-i\beta} \right) | n \rangle, \end{aligned} \quad (3.28)$$

onde em seguida são utilizadas as relações

$$\begin{aligned} \hat{a} |n\rangle &= \sqrt{n} |n-1\rangle, \\ \hat{a}^\dagger |n\rangle &= \sqrt{n+1} |n+1\rangle, \end{aligned}$$

e similarmente para  $\hat{b}$  e  $\hat{b}^\dagger$ . Os valores esperados do critério de Reid são obtidos da mesma forma. O resultado para a incerteza (2.62) é apresentado por Chowdhury *et al.*<sup>3</sup>:

$$(\Delta \tilde{B}_\beta)^2 = \frac{1}{2} \cosh 2r - \frac{1}{2} \tanh 2r \sinh 2r \cos^2(\alpha + \beta).$$

Escolhe-se, de acordo com a condição (2.60) e com o objetivo de minimizar  $\Delta \tilde{B}_\beta$ , os parâmetros ( $\beta_1 = 0, \alpha_1 = 0$ ) e ( $\beta_2 = \pi/2, \alpha_2 = \pi/2$ ). Dessa maneira, obtém-se  $(\Delta \tilde{B}_{\beta_1})^2 = (\Delta \tilde{B}_{\beta_2})^2 = \frac{1}{2 \cosh 2r}$ , resultando no produto

$$(\Delta \tilde{B}_{\beta_1})^2 (\Delta \tilde{B}_{\beta_2})^2 = \frac{1}{4 \cosh^2 2r} \leq \frac{1}{4}, \quad (3.29)$$

que é igual à 1/4 quando  $r = 0$  (estado separável) e sempre satisfaz a desigualdade (2.63) quando  $r \neq 0$ , como ilustrado na figura 3.4. Portanto, aplicando o critério de Reid para o estado comprimido de vácuo, direcionamento EPR é detectado sempre que o estado é separável, como esperado, uma vez que para estados puros emaranhamento e direcionamento EPR coalescem.

#### Critério entrópico

Relembrando a equação (2.72), tem-se

$$h(Q_{\mathcal{B}}|Q_{\mathcal{A}}) + h(P_{\mathcal{B}}|P_{\mathcal{A}}) < \ln \pi e, \quad (3.30)$$

<sup>3</sup>A notação utilizada pelos autores é tal que  $\hbar = m = \omega = 1$ . Todos os resultados futuros reproduzidos de Chowdhury *et al.* terão essa parametrização.

onde as entropias condicionais são dadas por<sup>4</sup>

$$\begin{aligned}
 h(Q_{\mathcal{B}}|Q_{\mathcal{A}}) &= h(q_{\mathcal{A}}, q_{\mathcal{B}}) - h(q_{\mathcal{A}}) \\
 &= \int dq_{\mathcal{A}} dq_{\mathcal{B}} p(q_{\mathcal{A}}, q_{\mathcal{B}}) \ln p(q_{\mathcal{A}}, q_{\mathcal{B}}) - \int dq_{\mathcal{A}} p(q_{\mathcal{A}}) \ln p(q_{\mathcal{A}}), \\
 h(P_{\mathcal{B}}|P_{\mathcal{A}}) &= h(p_{\mathcal{A}}, p_{\mathcal{B}}) - h(p_{\mathcal{A}}) \\
 &= \int dp_{\mathcal{A}} dp_{\mathcal{B}} p(p_{\mathcal{A}}, p_{\mathcal{B}}) \ln p(p_{\mathcal{A}}, p_{\mathcal{B}}) - \int dp_{\mathcal{A}} p(p_{\mathcal{A}}) \ln p(p_{\mathcal{A}}),
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

e as probabilidades marginais são obtidas com integrações apropriadas da função de Wigner, isto é,

$$\begin{aligned}
 p(q_{\mathcal{A}}, q_{\mathcal{B}}) &= \int dp_{\mathcal{A}} dp_{\mathcal{B}} P_W(q_{\mathcal{A}}, q_{\mathcal{B}}, p_{\mathcal{A}}, p_{\mathcal{B}}), \\
 p(q_{\mathcal{A}}) &= \int dq_{\mathcal{B}} dp_{\mathcal{A}} dp_{\mathcal{B}} P_W(q_{\mathcal{A}}, q_{\mathcal{B}}, p_{\mathcal{A}}, p_{\mathcal{B}}), \\
 p(p_{\mathcal{A}}, p_{\mathcal{B}}) &= \int dq_{\mathcal{A}} dq_{\mathcal{B}} P_W(q_{\mathcal{A}}, q_{\mathcal{B}}, p_{\mathcal{A}}, p_{\mathcal{B}}), \\
 p(p_{\mathcal{A}}) &= \int dp_{\mathcal{B}} dq_{\mathcal{A}} dq_{\mathcal{B}} P_W(q_{\mathcal{A}}, q_{\mathcal{B}}, p_{\mathcal{A}}, p_{\mathcal{B}}).
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

O resultado, como obtido por Chowdhury *et al.* é mostrado na figura 3.5, onde nota-se que o critério entrópico, assim como o critério de Reid, também acusa direcionamento EPR.

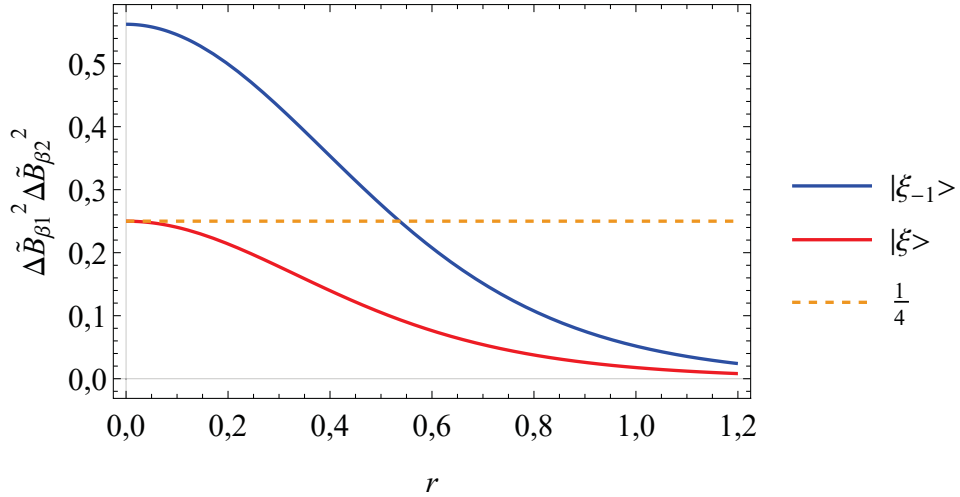


Figura 3.4: Produto das incertezas  $(\Delta\tilde{B}_{\beta_1})^2(\Delta\tilde{B}_{\beta_2})^2$  (critério de Reid para detecção de direcionamento EPR) calculado para o estado comprimido de vácuo  $|\xi\rangle$  (linha sólida vermelha) e para o estado comprimido de vácuo com um fóton subtraído (estado emaranhado que será tratado na próxima seção)  $|\xi_{-1}\rangle$  (linha sólida azul). Direcionamento EPR é registrado quando os valores das curvas plotadas são menores que  $1/4$  (linha tracejada laranja). Para o estado gaussiano  $|\xi\rangle$  esse critério consegue detectar direcionamento EPR quando o estado é emaranhado (ou seja, quando  $r \neq 0$ ), porém, para  $|\xi_{-1}\rangle$ , o critério falha para  $r$  pequeno.

<sup>4</sup>aqui também são utilizadas variáveis adimensionais de quadraturas  $q_{\mathcal{A}}, q_{\mathcal{B}}, p_{\mathcal{A}}$  e  $p_{\mathcal{B}}$  associadas aos observáveis (2.54).

### Cr terio baseado em realismo

Utilizando os observáveis (3.6) e (3.7) com  $n = m = 2$  e as equações (3.13) e (3.15) para calcular os valores esperados de (3.14) para o estado (3.23), obtemos

$$\begin{aligned}\langle A_\alpha^2 \otimes B_\beta^2 \rangle_{\Phi(\rho)} &= 2 \cosh^2(r) \left( 2 \sinh^2(r) \cos(2(\alpha + \beta)) + 2 \cosh(2r) - 1 \right), \\ \langle A_\beta^2 \rangle_{\Phi(\rho)} &= 2 \cosh^2(r).\end{aligned}\quad (3.33)$$

Assim como os valores esperados

$$\begin{aligned}\langle A_\alpha^2 \otimes B_\beta^2 \rangle_\rho &= \sinh^2(2r) \cos(2(\alpha + \beta)) + \cosh(4r), \\ \langle A_\alpha^2 \rangle_\rho &= \cosh(2r).\end{aligned}\quad (3.34)$$

Os quais, quando substituídos (3.14), resultam em

$$\Delta(A_\alpha^2, B_\beta^2, \rho) = 4 \sinh^2(r) \operatorname{sech}(2r) \cos^2(\alpha + \beta). \quad (3.35)$$

Claramente o critério baseado em realismo tem forte dependência nos observáveis escolhidos. Por exemplo, para  $\alpha + \beta = \pi(k - 1/2)$ , com  $k \in \mathbb{N}$  (o que ocorre, por exemplo para  $A_0 = Q'_\mathcal{A}$  e  $B_{\pi/2} = P'_\mathcal{B}$  com  $k = 1$ ),  $\Delta(A, B, \rho)$  se anula, ou seja, a hipótese de realismo em uma das partes resulta nos mesmos valores esperados da Mecânica Quântica usual. A máxima violação de realismo para Alice ocorre para  $\alpha + \beta = k\pi$ , com  $k \in \mathbb{N}$  (por exemplo,  $A_{\pi/2} = P'_\mathcal{A}$  e  $B_{\pi/2} = P'_\mathcal{B}$  com  $k = 1$ ), de modo que

$$\mathfrak{Q} = \max_{\alpha, \beta} \Delta(A_\alpha^2, B_\beta^2, |\xi\rangle \langle \xi|) = 2 \sinh^2(r) \operatorname{sech}(2r). \quad (3.36)$$

Além disso, é curioso que ao compararmos o critério (3.14) com o emaranhamento obtemos a razão

$$\frac{\Delta(A_\alpha, B_\beta, \rho)}{E_I} = \frac{2 \sinh^2(r) \operatorname{sech}(2r) \cos^2(\alpha + \beta)}{1 - \operatorname{sech}(2r)} = 2 \cos^2(\alpha + \beta). \quad (3.37)$$

De modo que as duas quantidades são múltiplas uma da outra e escolhendo os observáveis de maneira que  $\alpha + \beta = n\pi - \pi/4$ , com  $n \in \mathbb{N}$ , elas coincidem ou, em outras palavras, emaranhamento por ser emulado por uma teoria realista para um dos subespaços.

### 3.3 Estado comprimido de vácuo com um fóton subtraído

Vimos que o estado gaussiano  $|\xi\rangle$  revela direcionamento EPR quando submetido a qualquer um dos três critérios: de Reid, entrópico e baseado em realismo. Uma tarefa mais desafiadora consiste em aplicá-los a um estado não-gaussiano. Considera-se o estado

$$\begin{aligned}|\xi_{-1}\rangle &= [\hat{a} \otimes \mathbb{1} - \mathbb{1} \otimes \hat{b}] |\xi\rangle \\ &= \sqrt{1 - \lambda^2} \sum_n \lambda^n \sqrt{n} [|n-1\rangle \otimes |n\rangle - |n\rangle \otimes |n-1\rangle],\end{aligned}\quad (3.38)$$

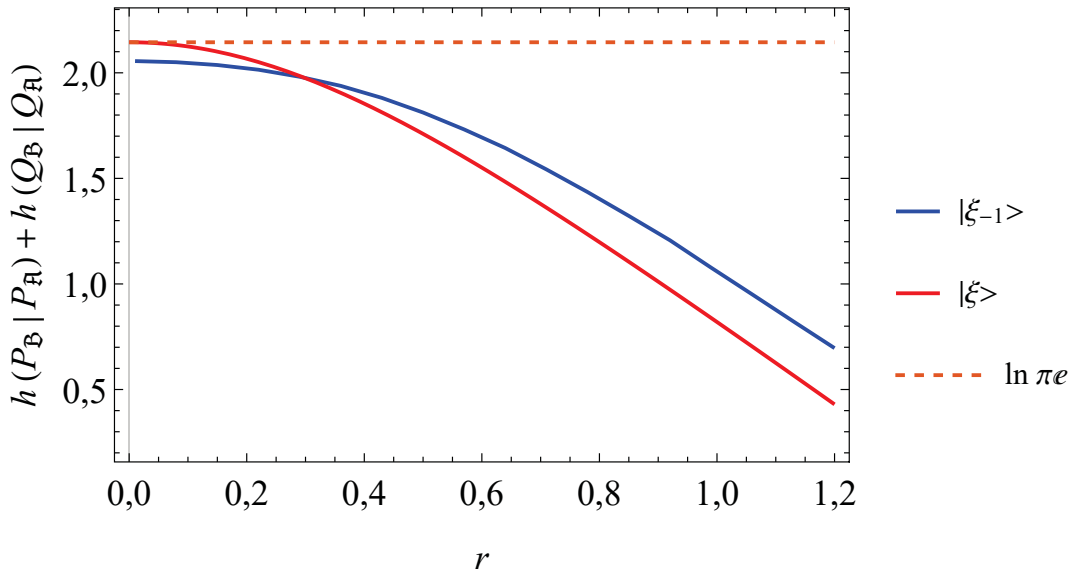


Figura 3.5: Lado esquerdo da desigualdade (2.72) (critério entrópico) para o estado comprimido de vácuo (linha sólida vermelha) e para o estado comprimido de vácuo com um fóton subtraído (linha sólida azul). Direcionamento EPR é detectado sempre os valores das curvas são menores que  $\ln \pi e$  (linha tracejada laranja). Logo, o estado comprimido de vácuo é, com exceção de para  $r = 0$ , sempre direcionável, e o estado comprimido de vácuo com um fóton subtraído é direcionável para todo valor de  $r$ .

onde  $\lambda = \tanh r$ , com normalização  $\frac{1}{2 \sinh^2 r}$ . A matriz densidade é dada por

$$\rho = 2 \operatorname{csch}^2(2r) \sum_{n_1, n_2} (\tanh r)^{n_1 + n_2} \sqrt{n_1 n_2} [ |n_1 - 1\rangle \langle n_2 - 1| \otimes |n_1\rangle \langle n_2| + |n_1\rangle \langle n_2| \otimes |n_1 - 1\rangle \langle n_2 - 1| - (|n_1 - 1\rangle \langle n_2| \otimes |n_1\rangle \langle n_2 - 1| + |n_1\rangle \langle n_2 - 1| \otimes |n_1 - 1\rangle \langle n_2|) ].$$

### 3.3.1 Emaranhamento

A entropia de emaranhamento é dada por

$$E_l = \frac{1}{4} \left( \operatorname{sech}^3(2r) - 3 \operatorname{sech}(2r) + 4 \right), \quad (3.39)$$

e, como ilustrado na figura 3.6, nota-se que  $|\xi_{-1}\rangle$  é emaranhado para todo valor de  $r$  (inclusive  $r = 0$ ) e sua entropia de emaranhamento tem crescimento monótono com  $r$  e valor assintótico  $E_l = 1$ .

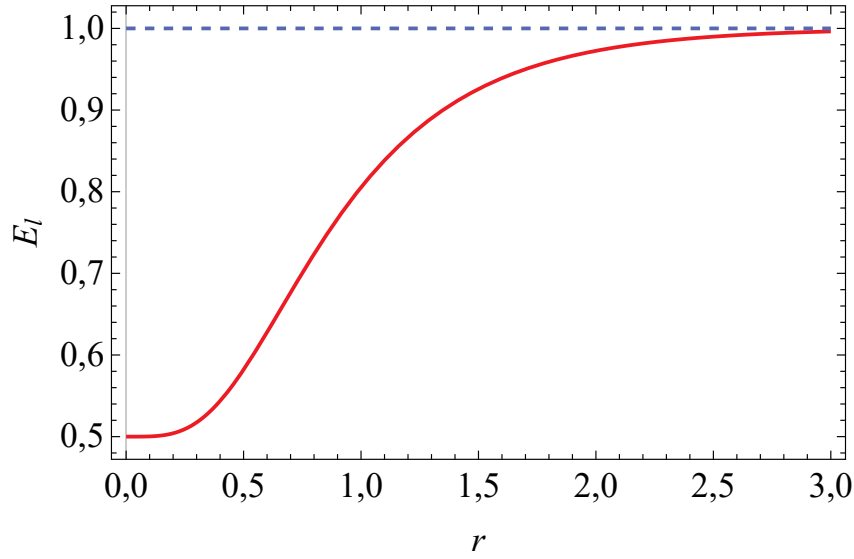


Figura 3.6: Entropia de emaranhamento  $E_l$  para o estado comprimido de vácuo com um fóton subtraído em termos do parâmetro de compressão  $r$ . Vemos que para todo  $r$  o estado é emaranhado. O emaranhamento tende assintoticamente para o valor máximo  $E_l = 1$  (linha tracejada).

### 3.3.2 Direcionamento EPR

A função de Wigner desse estado é fornecida por Chowdhury *et al.* [36]:

$$P_W(q_A, q_B, p_A, p_B) = \frac{1}{\pi^2} \exp \left[ 2(q_A q_B - p_A p_B) \sinh 2r - (q_A^2 + q_B^2 + p_A^2 + p_B^2) \cosh 2r \right] \\ \times \left\{ [p_A^2 - 2p_A p_B + p_B^2 + (q_A - q_B)^2] \cosh 2r - [p_A^2 - 2p_A p_B + p_B^2 - (q_A - q_B)^2] \sinh 2r - 1 \right\}. \quad (3.40)$$

E, da mesma maneira de que para o estado comprimido de vácuo, os autores, a partir de (2.62), obtêm a incerteza

$$(\Delta \tilde{B}_\beta)^2 = \cosh 2r - \sinh r \cosh r \cos 2\beta - \frac{[\cosh 2r \cos(\beta - \alpha) - 2 \sinh 2r \cos(\beta + \alpha)]^2}{4 [\cosh 2r - \sinh r \cosh r \cos 2\alpha]}. \quad (3.41)$$

Escolhendo os valores  $\beta_1 = 0$  e  $\beta_2 = \frac{\pi}{2}$  e selecionando os correspondentes valores de  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  de modo a minimizar  $\Delta \tilde{B}_\beta$ , obtém-se o produto das incertezas inferidas

$$(\Delta \tilde{B}_{\beta_1})^2 (\Delta \tilde{B}_{\beta_2})^2 = \frac{9}{2 [3 \cosh 4r + 5]}, \quad (3.42)$$

como mostrado na figura 3.4. Para valores pequenos de  $r$ , o critério de Reid falha em detectar direcionamento EPR. O critério entrópico é calculado a partir das equações (3.31) e o resultado obtido por Chowdhury *et al.* é plotado na figura 3.5, onde vemos que direcionamento EPR sempre é identificado.

Devido ao seu tamanho, omitimos a expressão para o critério baseado em realismo. Ela assume o valor máximo

$$\begin{aligned}\mathfrak{Q}(\rho) &= \max_{\alpha, \beta} \Delta(A_\alpha^2, B_\beta^2, |\xi_{-1}\rangle \langle \xi_{-1}|) \\ &= \left| \frac{2 \cosh(2r) + 5}{\sinh(2r) - 2 \cosh(2r) - 1} + \frac{1}{2 \cosh(2r) - \sinh(2r)} + 4 \sinh(2r) + 2 \cosh(2r) \right|, \quad (3.43)\end{aligned}$$

para todo valor de  $r$ , quando  $\alpha = n\pi$  e  $\beta = m\pi$ , com  $n, m \in \mathbb{N}$ , ou seja, quando escolhemos medir os observáveis de posição em ambos os subespaços. Este comportamento é ilustrado nas figuras 3.7(a) e 3.7(b), onde é plotado  $\Delta(A_\alpha^2, B_\beta^2, \rho)/\mathfrak{Q}$  em função dos parâmetros  $\alpha, \beta$  para dois valores de  $r$  e percebe-se que os picos correspondem a tais valores de  $\alpha$  e  $\beta$ . Devido à escala utilizada, não é possível perceber visualmente, mas os vales das figuras 3.7(a) e 3.7(b) em geral não correspondem a valores de  $\alpha$  e  $\beta$  para os quais  $\Delta(A_\alpha^2, B_\beta^2, \rho) = 0$ . Para tal análise, mostramos na figura 3.8 escolhas de  $\alpha$  e  $\beta$  onde os valores esperados usuais da Mecânica Quântica são compatíveis com a teoria realista desenvolvida na seção 3.1 ( $\Delta(A_\alpha^2, B_\beta^2, \rho) = 0$ ) para vários valores de  $r$ . Também plotamos  $\mathfrak{Q}(\rho)$  em função de  $r$  na figura 3.9, da qual nota-se que o critério baseado em realismo é uma função monótona de  $r$  e, para essa escolha de parâmetros  $(\alpha, \beta)$ , sempre acusa direcionamento EPR.

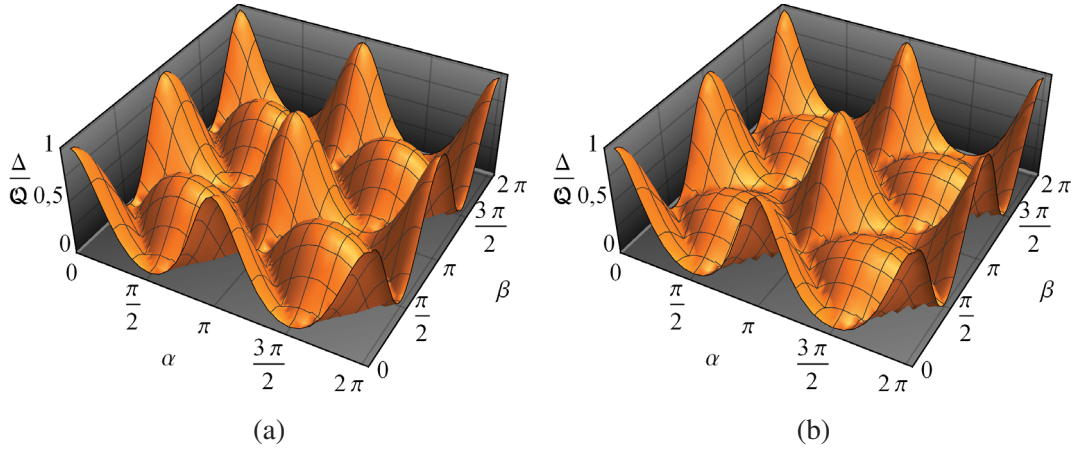


Figura 3.7: Critério de direcionamento baseado em realismo  $\Delta(A_\alpha^2, B_\beta^2, \rho)/\mathfrak{Q}$  para o estado comprimido de vácuo com um fóton subtraído com  $r = 0,5$  (figura 3.7(a)) e com  $r = 2$  (figura 3.7(b)).



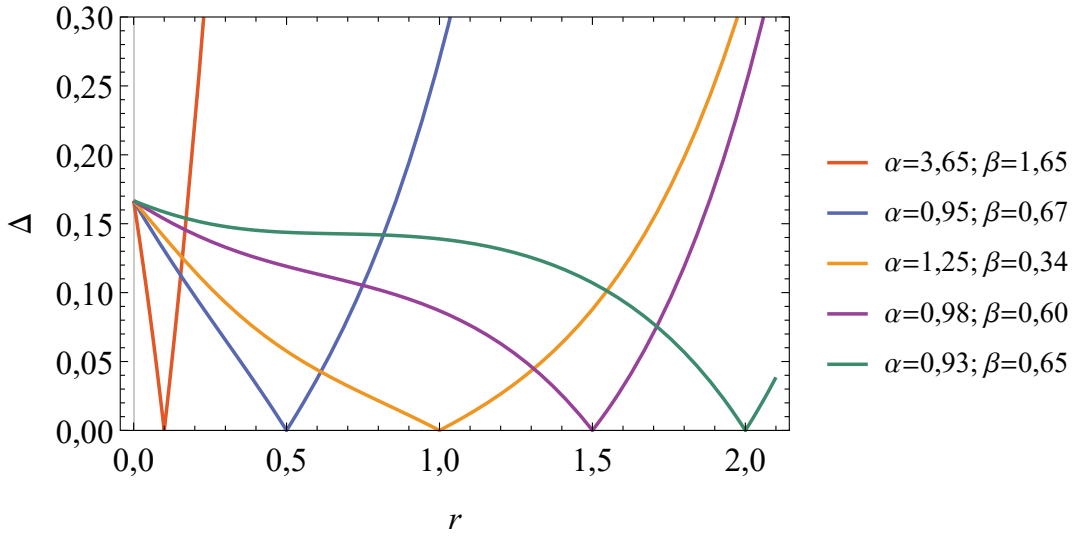


Figura 3.8: Critério baseado em realismo  $\Delta$  para o estado comprimido de vácuo com um fóton subtraído. Escolhemos  $\alpha$  e  $\beta$  de modo a mostrar que para diferentes valores de  $r$  é possível selecionar observáveis para os quais  $\Delta(A_\alpha^2, B_\beta^2, \rho) = 0$ . Isso indica a existência de contextos em que a Mecânica Quântica comporta a noção de realismo local no espaço de fase.

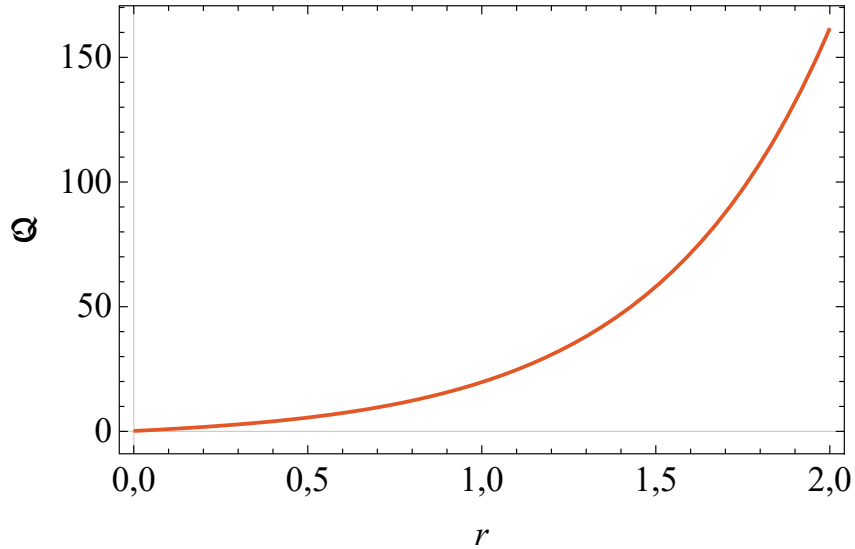


Figura 3.9: O quantificador  $\mathcal{Q}(\rho)$  de direcionamento EPR baseado em realismo para o estado comprimido de vácuo com um fóton subtraído é uma função monotonicamente crescente de  $r$ .

### 3.4 Superposição do primeiro e segundo estados do oscilador harmônico

Nos dois estados puros estudados até agora, o critério entrópico é capaz de detectar direcionamento EPR sempre que os estados são emaranhados, ainda que o critério de Reid não o

seja para o estado comprimido de vácuo com um fóton subtraído (com  $r$  pequeno). Veremos agora que existem estados nos quais até o critério entrópico falha. Considere os estados

$$\begin{aligned} |\Psi_1\rangle &= \cos \theta |0\rangle \otimes |0\rangle + \sin \theta |1\rangle \otimes |1\rangle, \\ |\Psi_2\rangle &= \cos \theta |0\rangle \otimes |1\rangle + \sin \theta |1\rangle \otimes |0\rangle. \end{aligned} \quad (3.44)$$

### 3.4.1 Emaranhamento

A entropia de emaranhamento é igual para ambos os estados e é dada por

$$E_I(\rho) = 1 - \sin^4(\theta) - \cos^4(\theta), \quad (3.45)$$

e, como ilustrado na figura 3.10, o estado é emaranhado com exceção de para  $\theta = n\pi/2$ , com  $n \in \mathbb{N}$ .

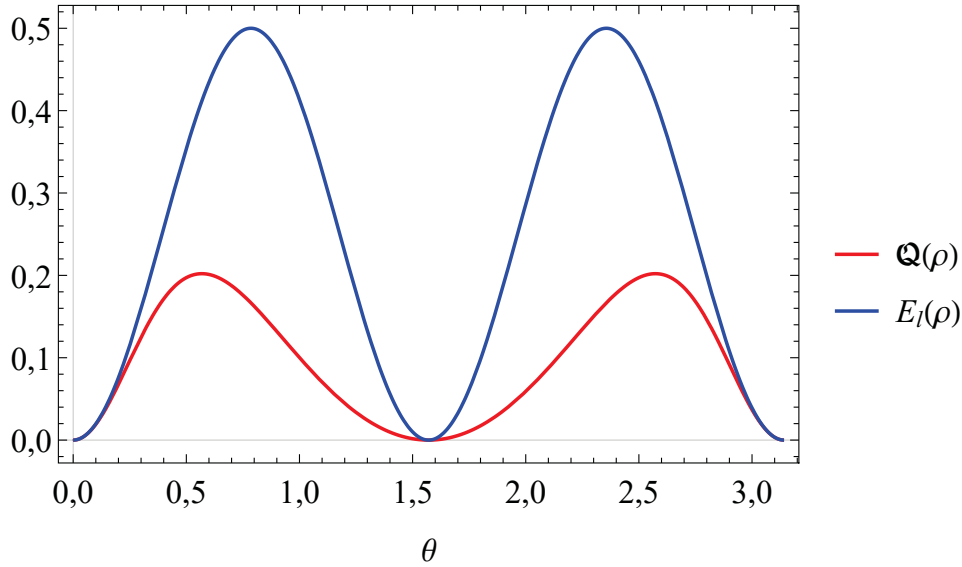


Figura 3.10: Emaranhamento medido pela entropia de emaranhamento  $E_I(\rho)$  (linha azul) e quantificador  $\mathcal{Q}(\rho)$  de direcionamento EPR baseado em realismo para os estados  $|\Psi_1\rangle$  ou  $|\Psi_2\rangle$  [equação (3.44)] (linha vermelha). Direcionamento EPR baseado em realismo é sempre detectado quando o estado é emaranhado.

### 3.4.2 Direcionamento EPR

Exploraremos agora o trabalho de Su *et al.* [74], no qual o critério de Reid e o critério entrópico são computados e comparados para o estado  $|\Psi_1\rangle$ . O resultado obtido pelos autores é mostrado na figura 3.11, na qual as desigualdades (2.72) e (2.63) são rearranjadas de modo que direcionamento EPR é identificado quando as funções plotadas são positivas. Percebe-se, da figura, que, na região central do gráfico, direcionamento EPR não é acusado pelo critério de Reid ou pelo critério entrópico, mesmo se tratando de um estado puro emaranhado nessa região central (exceto para  $\theta = n\pi/2$ , com  $n \in \mathbb{N}$ ), como visto na seção anterior.

Para o estado  $|\Psi_2\rangle$ , referimos o leitor à referência original [74], mas, similarmente ao estado  $|\Psi_1\rangle$ , existem valores de  $\theta$  para os quais ambos os critérios, de Reid e entrópico, falham em detectar direcionamento EPR.

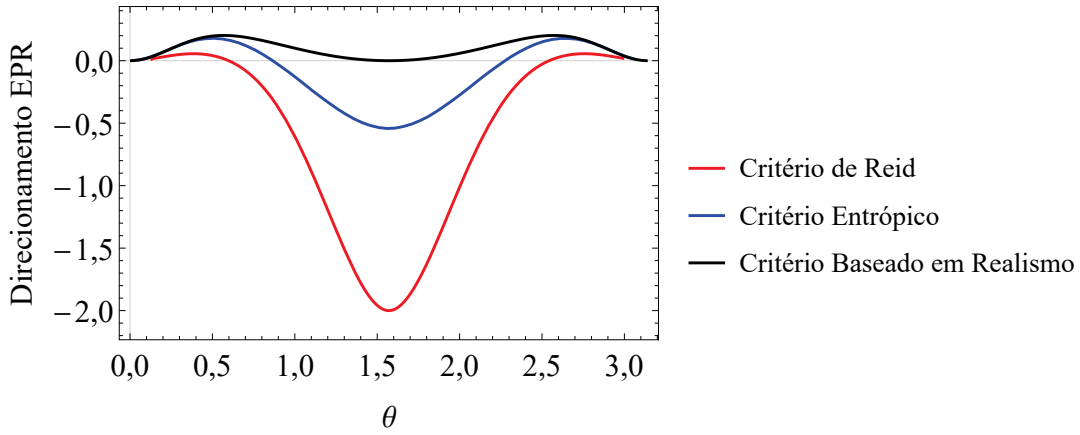


Figura 3.11: Critério entrópico (linha azul), critério de Reid (linha vermelha) e critério baseado em realismo (curva preta) para o estado  $|\Psi_1\rangle$ . Para os dois primeiros critérios, direcionamento EPR é detectado quando as funções plotadas são positivas. Na região  $0,6 \leq \theta \leq 2,5$  e  $0,9 \leq \theta \leq 2,3$ , o critério de Reid e o critério entrópico, respectivamente, falham (exceto para  $\theta = n\pi/2$ , com  $n \in \mathbb{N}$ ) em identificar direcionamento EPR.

O critério baseado em realismo para ambos os estados  $|\Psi_1\rangle$  e  $|\Psi_2\rangle$  é idêntico, independente de observável — igual à  $\mathfrak{Q}(\rho)$ , portanto — e dado por

$$\Delta(A_\alpha^2, B_\beta^2, \rho) = \mathfrak{Q}(\rho) = \left| \frac{\cos(4\theta) - 1}{-10 \cos(2\theta) + \cos(4\theta) + 13} \right|. \quad (3.46)$$

Como mostrado na figura 3.10, o critério baseado em realismo detecta direcionamento EPR sempre que o estado é emaranhado. Também nessa figura vemos que o emaranhamento e o critério de direcionamento EPR, ainda que, como esperado, se anulem simultaneamente em  $\theta = \frac{n\pi}{2}$ , com  $n \in \mathbb{N}$ , têm máximos defasados. O primeiro máximo da entropia de emaranhamento ocorre quando  $\theta_1 = 0,78$ , para o qual o estado é maximamente emaranhando. Porém, o máximo de direcionamento EPR acontece para  $\theta_2 = 0,57$ . Como consequência, no regime  $\theta \in (\theta_2, \theta_1)$  o emaranhamento cresce enquanto direcionamento EPR decresce. Isto sugere que emaranhamento e a noção de direcionamento EPR capturada pelo critério baseado em realismo são fenômenos distintos mesmo para estados puros. Tal conclusão já foi obtida através de outra ótica no trabalho de Silveira e Angelo [47, 48], pois como discutido na seção 2.8, emaranhamento pode ser mimetizado, em certos regimes, por uma teoria clássica-estatística, ao passo que direcionamento EPR e não localidade de Bell não podem.

### 3.5 Estado N00N

Vejamos mais um estado bipartido puro emaranhado no qual o critério de Reid e o critério entrópico não detectam direcionamento EPR. Considere o estado N00N

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |n\rangle \otimes |0\rangle + e^{i\phi} |0\rangle \otimes |n\rangle \right), \quad (3.47)$$

no qual  $n$  fótons podem ser encontrados no primeiro ou no segundo subespaço. Seu uso em interferometria permite, em comparação com interferômetros clássicos, a melhora por um fator

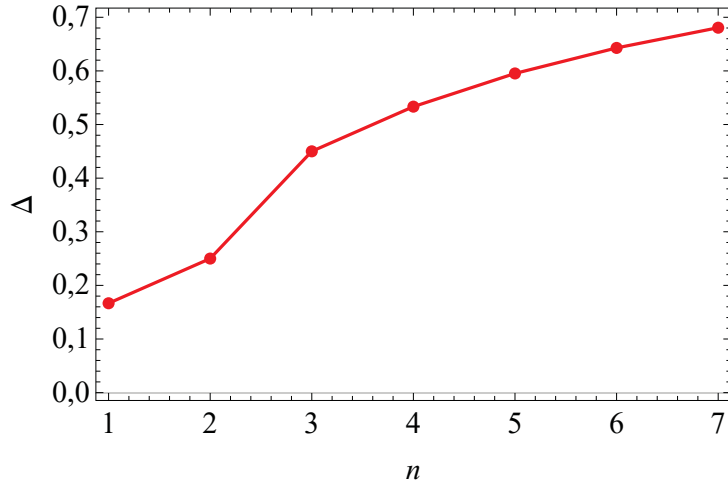


Figura 3.12: Critério baseado em realismo para o estado N00N para vários valores de  $n$ . O valor  $n = 2$  é o único para o qual há dependência em  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\phi$ . Para esse  $n$ , escolhemos o valor máximo de  $\Delta(A_\alpha^2, B_\beta^2, \rho)_{n=2}$  para exibir no gráfico.

de  $n^{\frac{1}{2}}$  na sensibilidade do interferômetro [75]. Este é um estado maximamente emaranhado e a entropia de emaranhamento é independente de  $n$  e  $\phi$ :

$$E_l(\rho) = \frac{1}{2}. \quad (3.48)$$

Como calculado por Chowdhury *et al.* [36], para  $n = 1$  direcionamento EPR é detectado pelo critério entrópico, assim como não localidade de Bell é detectada pela desigualdade CHSH. Porém, para  $n \geq 2$ , não é possível detectar direcionamento EPR nem não localidade de Bell por esses critérios, apesar do estado ser puro e não separável. Entretanto, o critério baseado em realismo é capaz de identificar direcionamento EPR. Para  $n = 2$ , por exemplo, temos

$$\Delta(A_\alpha^2, B_\beta^2, \rho)_{n=2} = \left| \frac{1}{4} \cos(2\alpha - 2\beta + \phi) - \frac{2}{3}(\cos \phi + 1) \right|. \quad (3.49)$$

Na figura 3.12 mostramos o comportamento monótono do critério baseado em realismo em função de  $n$ .

## Capítulo 4

### Conclusão

Revisamos o trabalho de Silveira e Angelo (SA) [47, 48], no qual é considerado um modelo-clássico estatístico que reproduz emaranhamento para tempos curtos e cujas trajetórias no espaço de fase cumprem o papel de variáveis ocultas. Tendo em conta que, para estados puros, emaranhamento e não localidade coalescem, SA avaliam a desigualdade de Bell para o modelo clássico e concluem que, apesar de mimetizar emaranhamento, ele não apresenta não localidade de Bell, estando assim de acordo com o teorema de Bell. No presente trabalho, nos valem da desigualdade de Cavalcanti *et al.* [31] para investigar direcionamento EPR (recurso intermediário entre emaranhamento e não localidade de Bell) no modelo de SA e constatamos que, assim como não localidade de Bell, direcionamento também não é encontrado em tal modelo. Logo, se considerarmos que um determinado recurso é "menos quântico" se ele pode ser mimetizado (pelo menos a tempos curtos) por uma dinâmica quase-clássica, a qual é definida por um hamiltoniano  $\mathcal{H}$  e estados iniciais puros e coerentes (os mais clássicos possíveis), então vemos que emaranhamento pode ser distinguido de não localidade de Bell e direcionamento EPR mesmo no contexto de estados puros.

Na segunda parte deste trabalho, faz-se uma conexão do direcionamento EPR com o conceito de irrealismo. Revemos o trabalho de Bilobran e Angelo [40] e nos inspiramos no mapa (2.89) definido no contexto de variáveis discretas, onde medições não reveladas de um observável  $O$  produzem um estado  $\Phi_O(\rho)$  no qual o observável é real. Estendemos então esse mapa considerando medições não reveladas concomitantes de posição e momento em um dos subespaços (de Alice) de um estado bipartido e mostramos que no limite onde as variáveis  $(q, p)$  estão simultaneamente bem definidas, recobramos o âmbito clássico, obtendo assim um estado que é não direcionável. Definimos um critério para detecção de direcionamento EPR através da comparação de valores esperados calculados no estado  $\rho$  original e valores esperados calculados no estado  $\Phi(\rho)$ , ou seja, uma medida de quanto uma teoria na qual é considerada uma hipótese realista para o subsistema da Alice se distancia da Mecânica Quântica. Também discutimos brevemente a proposta de que, ao maximizá-lo nos observáveis  $A$  e  $B$ , o critério baseado em realismo  $\Delta(A^n, B^m, \rho)$  sirva também como um quantificador de direcionamento EPR. É importante ressaltar que a hipótese de não direcionabilidade envolve uma distribuição de probabilidades geral para Alice, enquanto o nosso critério contempla especificamente uma distribuição relacionada a um estado com realismo para posição e momento no subsistema dela. Logo, é possível, a princípio, que existam estados que sejam direcionáveis mas o critério de direcionamento EPR baseado em realismo não seja capaz de identificar tal condição por estar baseado em uma hipótese muito restritiva.

Para o estado comprimido de vácuo de dois modos, o nosso critério de direcionamento EPR concorda com o critério de Reid e com o critério entrópico e, além disso, para escolhas

apropriadas de observáveis, tem expressão idêntica a do emaranhamento medido pela entropia de emaranhamento. Ao testá-lo para o estado comprimido de vácuo com um fóton subtraído, no qual o critério entrópico é eficaz mas o critério de Reid falha (pois não identifica direcionamento EPR em um estado puro emaranhado), também detectamos direcionamento EPR. Em outros três estados analisados, o estado  $N00N$  e os dois estados envolvendo a superposição de estados do oscilador harmônico, o critério baseado em realismo também revela direcionamento EPR sempre que os estados são emaranhados, ao contrário do critério de Reid e do critério entrópico, que, para alguns regimes, não são capazes de acusar esse aspecto não local.

Como perspectiva futura, é desejável estender o nosso trabalho para estados mistos, nos quais emaranhamento, não localidade de Bell e direcionamento EPR não coalescem, e então estudar, por exemplo, de que maneira o critério de direcionamento EPR baseado em realismo difere de medidas de emaranhamento.

## REFERÊNCIAS

- [1] SCHRÖDINGER, E. Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik. **Naturwissenschaften**, v. 23, n. 48, p. 807-812, 1935.
- [2] EINSTEIN, A.; PODOLSKY, B.; ROSEN, N. Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete? **Physical Review**, v. 47, n. 10, p. 777-780, 1935.
- [3] BELL, J. S. On the Einstein Podolsky Rosen paradox. **Physics**, v. 1, n. 3, p. 195-200, 1964.
- [4] CLAUSER, J.; HORNE, M. A.; SHIMONY, A.; HOLT, R. A. Proposed Experiment to Test Local Hidden-Variable Theories. **Physical Review Letters**, v. 23, n. 15, p. 880-884, 1969.
- [5] FREEDMAN, S. J.; CLAUSER, J. F. Experimental Test of Local Hidden-Variable Theories. **Physical Review Letters**, v. 28, n. 14, p. 938-941, 1972.
- [6] ASPECT, A.; GRANGIER, P.; ROGER, G. Experimental Tests of Realistic Local Theories via Bell's Theorem. **Physical Review Letters**, v. 47, n. 7, p. 460-463, 1981.
- [7] ASPECT, A.; DALIBARD, J.; ROGER, G. Experimental Test of Bell's Inequalities Using Time-Varying Analyzers. **Physical Review Letters**, v. 49, n. 25, p. 1804-1807, 1982.
- [8] SCHMIED, R. *et al.* Bell correlations in a Bose-Einstein condensate. **Science**, v. 352, n. 6284, p. 441-444, 2016.
- [9] DEHOLLAIN, J. P. *et al.* Bell's inequality violation with spins in silicon. **Nature Nanotechnology**, v. 11, p. 242-246, 2016.
- [10] THEARLE, O. *et al.* Violation of Bell's Inequality Using Continuous Variable Measurements. **Physical Review Letters**, v. 120, n. 4, p. 040406, 2018.
- [11] RAUCH, D. *et al.* Cosmic Bell Test Using Random Measurement Settings from High-Redshift Quasars. **Physical Review Letters**, v. 121, n. 8, p. 080403, 2018.
- [12] ROSENFELD, W. *et al.* Event-Ready Bell Test Using Entangled Atoms Simultaneously Closing Detection and Locality Loopholes. **Physical Review Letters**, v. 119, n. 1, p. 010402, 2017.
- [13] GIUSTINA, M. *et al.* Significant-Loophole-Free Test of Bell's Theorem with Entangled Photons. **Physical Review Letters**, v. 115, n. 25, p. 250401, 2015.
- [14] BOHM, D. A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of "Hidden"Variables. I. **Physical Review**, v. 85, n. 2, p. 166-179, 1952.

- [15] BOHM, D. A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of "Hidden"Variables. II. **Physical Review**, v. 85, n. 2, p. 180-193, 1952.
- [16] HORODECKI, R. *et al.* Quantum entanglement. **Reviews of Modern Physics**, v. 81, n. 2, p. 865-942, 2009.
- [17] OLLIVIER, H.; ZUREK, W. H. Quantum Discord: A Measure of the Quantumness of Correlations. **Physical Review Letters**, v. 88, n. 1, p. 017901, 2001.
- [18] HENDERSON, L; VEDRAL, V. Classical, quantum and total correlations. **Journal of Physics A: Mathematical and General**, v. 34, 2001.
- [19] SCHRÖDINGER, E. Discussion of Probability Relations between Separated Systems. **Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society**, v. 31, n. 4, p. 555-563, 1935.
- [20] WISEMAN, H. M.; JONES, S. J.; DOHERTY, A. C. Steering, entanglement, nonlocality, and the Einstein-Podolsky-Rosen paradox. **Physical Review Letters**, v. 98, n. 14, p. 140402, 2007.
- [21] BAVARESCO, J. **When Bob cannot trust Alice. A semi-device independent tale of quantum steering.** Dissertação (Mestrado em Física) — Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2016.
- [22] ZÁRATE, L. R. Applications of EPR steering in quantum teleportation and NOON states. In: Latin-American School of Physics Marcos Moshinsky ELAF, 2017, Cidade do México. **AIP Conference Proceedings**, v. 1950. American Institute of Physics, 2018. p. 030008.
- [23] XIANG, Y. *et al.* Multipartite Gaussian steering: monogamy constraints and quantum cryptography applications. **Physical Review Letters**, v. 95, n. 1, p. 010101, 2017.
- [24] BRANCIARD, C. *et al.* One-sided device-independent quantum key distribution: Security, feasibility, and the connection with steering. **Physical Review Letters**, v. 85, n. 1, p. 010301, 2012.
- [25] KOCSIS, S. Experimental measurement-device-independent verification of quantum steering. **Nature Communications**, v. 6, 2015.
- [26] HE, Q. *et al.* Secure Continuous Variable Teleportation and Einstein-Podolsky-Rosen Steering. **Physical Review Letters**, v. 115, n. 18, p. 180502, 2015.
- [27] REID, M. D. Signifying quantum benchmarks for qubit teleportation and secure quantum communication using Einstein-Podolsky-Rosen steering inequalities. **Physical Review A**, v. 88, n. 6, p. 062338, 2013.
- [28] LIUZZO-SCORPO, P.; ADESSO, G. Optimal secure quantum teleportation of coherent states of light. In: SPIE Nanoscience + Engineering, 2017, São Diego, Estados Unidos. **Proceedings v. 10358, Quantum Photonic Devices**. SPIE, 2017.
- [29] BENNETT, C. H. *et al.* Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels. **Physical Review Letters**, v. 70, n. 13, p. 1895–1899,



1993.

- [30] CAVALCANTI, E. G. *et al.* Analog of the Clauser–Horne–Shimony–Holt inequality for steering. **Physical Review A**, v. 80, n. 3, p. 032112, 2009.
- [31] CAVALCANTI, E. G. *et al.* Experimental criteria for steering and the Einstein-Podolsky-Rosen paradox. **Journal of the Optical Society of America B**, v. 32, n. 4, p. A74-A81, 2015.
- [32] UOLA, R. *et al.* Quantum Steering. arXiv:1903.06663
- [33] COSTA, A. C. S.; ANGELO, R. M. Quantification of Einstein-Podolski-Rosen steering for two-qubit states. **Physical Review A**, v. 93, n. 2, p. 020103, 2016.
- [34] REID, M. D. Demonstration of the Einstein-Podolsky-Rosen paradox using nondegenerate parametric amplification. **Physical Review A**, v. 40, n. 2, p. 913-923, 1989.
- [35] WALBORN, S. P.; SALLES, A.; GOMES, R. M.; TOSCANO, F.; SOUTO RIBEIRO, P. H. Revealing Hidden Einstein-Podolsky-Rosen Nonlocality. **Physical Review Letters**, v. 106, n. 13, p. 130402, 2011.
- [36] CHOWDHURY, P.; PRAMANIK, T.; MAJUMDAR, A. S.; AGARWAL, G. S. Einstein-Podolsky-Rosen steering using quantum correlations in non-Gaussian entangled states. **Physical Review A**, v. 89, n. 1, p. 012104, 2014.
- [37] GISIN, N. Non-realism: Deep Thought or a Soft Option? **Foundations of Physics**, v. 42, n. 1, p. 80-85, 2012.
- [38] NORSEN, T. John S. Bell's concept of local causality. **American Journal of Physics**, v. 79, n. 12, 2011.
- [39] GOLDSTEIN, S. *et al.* **Scholarpedia**. Bell's theorem. Scholarpedia, 6(10):8378.
- [40] BILOBRAN, A. L. O.; ANGELO, R. M. A measure of physical reality. **Europhysics Letters**, v. 112, p. 40005, 2015.
- [41] GOMES, V. S.; ANGELO, R. M. Nonanomalous measure of realism-based nonlocality. **Physical Review A**, v. 97, n. 1, p. 012123, 2018.
- [42] GOMES, V. S.; ANGELO, R. M. Resilience of realism-based nonlocality to local disturbance. **Physical Review A**, v. 99, n. 1, p. 012109, 2019.
- [43] DIEGUEZ, P. R.; ANGELO, R. M. Information-reality complementarity: The role of measurements and quantum reference frames. **Physical Review A**, v. 97, n. 2, p. 022107, 2018.
- [44] MANCINO, L. *et al.* Information-reality complementarity in photonic weak measurements. **Physical Review A**, v. 97, n. 6, p. 062108, 2018.
- [45] FREIRE, I. S.; ANGELO, R. M. Quantifying continuous-variable realism. arXiv:1904.02490

- [46] GALLEGO, R.; AOLITA, L. Resource Theory of Steering. **Physical Review X**, v. 5, n. 4, p. 041008, 2015.
- [47] SILVEIRA, L. S.; ANGELO, R. M. Classical-hidden-variable description for entanglement dynamics of two-qubit pure states. **Physical Review A**, v. 95, n. 6, p. 062105, 2017.
- [48] SILVEIRA, L. S. **Modelo de variáveis ocultas para descrição de emaranhamento e não localidade de Bell no contexto de estados puros**. Dissertação (Mestrado em Física) – Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2017.
- [49] JACOBS, K. **Quantum Measurement Theory and its Applications**. Reino Unido: Cambridge University Press, 2014.
- [50] SAKURAI, J. J. **Modern Quantum Mechanics**. 2 ed. São Francisco: Addison-Wesley, 1982.
- [51] COHEN-TANNOUDJI, C.; DIU, B.; LALOE, F. **Quantum Mechanics**, v. 1, França: Hermman, 1977.
- [52] NIELSEN, M. A.; CHUANG, I. L. **Quantum Computation and Quantum Information**. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.
- [53] NEUMANN, J. V. **Mathematical Foundations of Quantum Mechanics**. New Jersey: Princeton University Press, 1955.
- [54] BENGTTSSON, I.; ZYCZKOWSKI, K. **Geometry of Quantum States**. New York: Cambridge University Press, 2006.
- [55] ARAKI, H.; LIEB, E. H. Entropy Inequalities. **Communications in Mathematical Physics**, v. 18, n. 2, p. 160-170, 1970.
- [56] BENNETT, C. H. *et al.* Concentrating partial entanglement by local operations. **Physical Review A**, v. 53, n. 4, p. 2046-2052, 1996.
- [57] BRUSS, D. Characterizing entanglement. **Journal of Mathematical Physics**, v. 43, n. 9, p. 4237, 2002.
- [58] SKRZYPCZYK, P.; NAVASCUÉS, M.; CAVALCANTI, D. Quantifying Einstein-Podolsky-Rosen steering. **Physical Review Letters**, v. 112, n. 18, p. 180404, 2014.
- [59] BOHM, D.; HILEY, B. J. **The Undivided Universe: An Ontological Interpretation of Quantum Theory**. Londres: Routledge, 1991.
- [60] MYCIELSKI, J.; BIAŁYNICKI-BIRULA, I. Uncertainty relations for information entropy in wave mechanics. **Communications in Mathematical Physics**, v. 44, n. 2, p. 129–132, 1975.
- [61] JONES, S. J.; WISEMAN, H. M.; DOHERTY, A. C. Entanglement, Einstein-Podolsky-Rosen correlations, Bell nonlocality, and steering. **Physical Review Letters**, v. 76, n. 5, p. 052116, 2007.

- [62] GISIN, N. Bell's inequality holds for all non-product states. **Physics Letters A**, v. 151, n. 5-6, p. 201-202, 1991.
- [63] ANGELO, R. M. *et al.* Quantum linear mutual information and classical correlations in globally pure bipartite systems. **Physica A**, v. 338, p. 458-470, 2004.
- [64] CASE, W. B. Wigner functions and Weyl transforms for pedestrians. **American Journal of Physics**, v. 76, n. 10, 2008.
- [65] MARCHIOLLI, M. A. Mecânica Quântica no Espaço de Fase: I. Formulação de Weyl-Wigner. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 24, n. 4, p. 421-436, 2002.
- [66] ANGELO, R. M. **Aspectos Quânticos e Clássicos da Dinâmica de Emaranhamento em Sistemas Hamiltonianos**. Tese (Doutorado em Física) — Instituto de Física Gleb Wataghin, Universidade Estadual de Campinas, 2003.
- [67] HIRSCH, F. *et al.* Algorithmic Construction of Local Hidden Variable Models for Entangled Quantum States. **Physical Review Letters**, v. 117, n. 19, p. 190402, 2016.
- [68] RADCLIFFE, J. M. Some properties of coherent spin states. **Journal of Physics A: General Physics**, v. 4, n. 3, 1971.
- [69] HUSIMI, H. Some Formal Properties of the Density Matrix. **Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan**, v. 2, n. 4, p. 264-314, 1940.
- [70] HONG-YI, F.; SHU-GUANG, L. Wigner Distribution Function and Husimi Function of a Kind of Squeezed Coherent State. **Communications in Theoretical Physics**, v. 47, n. 3, p. 427-430, 2007.
- [71] CIREL'SON, B. S. Quantum generalizations of Bell's inequality. **Letters in Mathematical Physics**, v. 4, n. 2, p. 93-100, 1980.
- [72] LVOVSKY, A. I. Squeezed Light. In: Andrews, D. L. **Photonics: Scientific Foundations, Technology and Applications**, v. 1. New Jersey: John Wiley & Sons, 2015, p. 121-163.
- [73] OU, Z. Y. Realization of the Einstein-Podolsky-Rosen paradox for continuous variables. **Physical Review Letters**, v. 68, n. 25, p. 3663-3666, 1992.
- [74] SU, H. Y. *et al.* Detecting Einstein-Podolsky-Rosen steering for continuous variable wavefunctions. **International Journal of Quantum Information**, v. 11, n. 2, p. 1350019, 2013.
- [75] LEE, H.; KOK, P.; DOWLING, J. P. A quantum Rosetta stone for interferometry. **Journal of Modern Optics**, v. 49, n. 14/15, 2002.